به نام خداوند مهربان

جزوه‌ی آموزش مکانیک سماوی

سیدامیر سادات‌موسوی

این جزوه‌ی آموزشی را برای کتابی با نام گنجینه‌ی المپیاد نجوم نوشته بودم، با توجه به اینکه تهیه‌ی این کتاب سخت است، با انتشارات آن صحبت کردم و به من اجازه دادند که متن را در اختیار علاقه‌مندان قرار بدهم. پیش از مطالعه‌ی این جزوه باید با مشتق و انتگرال آشنایی داشته باشید.

انتشار و پخش این جزوه، بدون بهره‌برداری مالی و مادی آزاد است. لطفاً این جزوه را به دست علاقه‌مندان به المپیاد نجوم برسانید.

سیدامیر سادات‌موسوی

B3amirb@gmail.com

۱۳۹۵

فصل چهارم

مکانیک سماوی

دیدگاه

پیشرفت مبحث مکانیک مانند بسیاری از مباحث دیگر فیزیک هنگامی حاصل شد که ابزاری قوی به نام ریاضیات در دست بشر، قرار گرفت. فصلی که در آغاز آن هستیم. یعنی «مکانیک سماوی» به همین ترتیب، درهم تنیدگی شدیدی با ریاضیات پیشرفته دارد و تقریباً بدون حساب دیفرانسیل و انتگرال سخن گفتن از آن ممکن نیست از طرفی به صورت معمول برای دانش‌آموزان و دبیرستانی، آموختن حساب دیفرانسیل و انتگرال و به کارگیری از آن در مباحث فیزیکی تا مقطع پیش‌دانشگاهی هم حاصل نمی‌شود.

آنچه در این فصل برای ما اهمیت داشته است، توضیح و تبیین مطالبی در خصوص مکانیک سماوی است که غالباً در کتاب‌های فارسی، مسکوت مانده است و منبعی برای آموختن آن‌ها وجود ندارد. بنابراین فراتر بودن سطح ریاضیات این فصل نسبت به سطح ریاضیات دوره‌ی دبیرستان را مشکل چندانی به حساب نیاورده‌ایم و هر جا نیازی وجود داشته است از مشتق و انتگرال استفاده کرده‌ایم. البته سعی شده است این موضوع با توضیحات اولیه‌ای همراه باشد. امّا به هر حال کسی که آشنایی چندانی با ریاضیات پیشرفته نداشته باشد، احتمالاً در بسیاری از قسمت‌های این فصل با مشکل روبه‌رو خواهد شد. بنابراین بر تمامی خوانندگان کوشا و علاقه‌مند لازم است که مشتق و انتگرال و حساب دیفرانسیل را فرابگیرند.[1]

نکته‌ی دیگری که ذکر آن ضروری به نظر می‌رسد، این است که این فصل در خصوص مکانیک سماوی است و در آن به صورت کلی به مکانیک پرداخته نشده است. بنابراین مطالب مقدماتی مورد نیاز، مانند تکانه، قضیه‌ی مرکز جرم، گشتاور و... بصورت دقیق بررسی نشده‌اند و تلاش بر این بوده است که با ارائه‌ی مقدمات مورد نیاز، به بررسی اصل مطالب یعنی مسئله‌ی دو جسم پرداخته شود.

نیرو در طبیعت

بشر همیشه دوست داشته است که، علّت حرکت اجسام را بداند. همیشه دوست داشته است بفهمد که چگونه وقتی ما یک قطعه سنگ را هل می‌دهیم، جابه‌جا می‌شود. از هزاران سال پیش، انسان‌ها می‌دانستند که عواملی باعث می‌شود که جسمی در نحوه‌ی حرکت جسم دیگر، تغییری ایجاد کند. آن‌ها این کشش و رانش را «نیرو» یا «قوه» نامیده بودند. چیزی که همیشه جای سؤال داشت، این بود که تأثیر نیرو به چه شکلی است؟

ارسطو نیرو را عامل حرکت، یعنی جابه‌جایی می‌دانست. او در طبیعت همواره دیده بود که وقتی جسمی کشیده می‌شود، به راه می‌افتد و وقتی کشیدن را متوقف کنیم، آن جسم از حرکت باز می‌ماند. این تفکر که نیرو عامل حرکت است مثل بسیاری از تفکرات دیگر ارسطو برای مدت طولانی بر جامعه‌ی علمی حکم‌فرما بود. اغلب دانشمندان مسلمان هم مدت‌ها تحت تأثیر همین تفکرات، بودند و در قرون متمادی به پرورش این ایده‌ها و البته ایجاد تصحیحات و بسترسازی‌های نو برای آن‌ها پرداختند.

۱- به عنوان نمونه می‌توانید به کتاب «حسابان» سال سوم دبیرستان و «حساب دیفرانسیل و انتگرال» پیش‌دانشگاهی رجوع کنید یا از کتاب‌های زیر بهره بگیرید:
حساب دیفرانسیل و انتگرال، سیاووش شهشانی، جلد۱، انتشارات فاطمی.
حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، توماس، جلد۱، مرکز نشر دانشگاهی.

ابن‌سینا در بخش طبیعیات دانش‌نامه‌ی علائی، در مورد دو نوع حرکت توضیح می‌دهد.[1] یکی حرکت «طبیعی» و دیگری حرکت «قَسری». او می‌گوید، حرکت طبیعی مربوط به طبیعت اجسام است و چیزی است که خود اجسام مایل به آن هستند. امّا حرکت قسری یک نوع حرکت تحمیلی از محیط است. مثلاً یک تکه سنگ، حرکت طبیعی‌اش به سمت زمین و به طرف سایر سنگ‌هاست. حالا وقتی ما سنگی را به سمت آسمان پرتاب می‌کنیم، باعث یک حرکت قسری و تحمیل، دقیقاً مخالف حرکت طبیعی آن می‌شویم. تکه سنگ ابتدا به طرف بالا حرکت می‌کند امّا به مرور مانند کسی که خشمگین شده است و کم‌کم آرامش خود را باز می‌یابد، متوجه حرکت طبیعی خود می‌شود باز می‌ایستد و به سمت زمین برمی‌گردد.

می‌بینید که همیشه مدل‌هایی برای بررسی حرکت اجسام وجود داشته است. شاید مهم‌ترین ایراد وارد بر مدل‌های آن زمان، متکی نبودن به عدد باشد. مثلاً همین حرکت طبیعی و قسری با اینکه کلیت حرکت را توصیف می‌کند، امّا به ما نمی‌گوید که یک تکه سنگ بالاخره در چه ارتفاعی توقف خواهد کرد؟ چه‌قدر طول می‌کشد تا بایستد؟ بنابراین ما نمی‌توانیم با انجام یک آزمایش، درستی یا نادرستی آن را بسنجیم.

امّا تفکری که امروزه در مورد نیرو و حرکت رایج است، چیزی است که بصورت مدون از کتاب «پرینکیپیا»ی نیوتن شروع شده است. در این نگاه که تاکنون بارها و بارها از آزمایش‌های مختلف سربلند بیرون آمده است، نیرو عامل تغییر سرعت است. یعنی شتابی که یک جسم می‌گیرد با نیرویی که به آن وارد می‌شود، متناسب است. طبق این تفکر اگر به جسمی نیرویی وارد نشود، تا ابد باید با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه دهد. امّا چرا این موضوع با تجربه‌های روزانه‌ی ما متناقض است؟ چرا وقتی ما بر روی یک میز، به جسمی یک سرعت اولیه می‌دهیم، پس از مدتی متوقف می‌شود؟ پاسخ خیلی ساده است. ما نیروی اصطکاک را همیشه نادیده گرفته‌ایم. اگر اصطکاک نبود، این جسم تا ابد با همان سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌داد.

قوانین نیوتن

قانون اول

اگر جسمی در یک دستگاه مختصات لَخت (بدون شتاب) با سرعت ثابت در حال حرکت باشد و نیرویی به آن وارد نشود، همواره به حرکت خود با همین سرعت ادامه خواهد داد و اگر جسمی ساکن باشد، همواره ساکن خواهد ماند.

قانون دوم

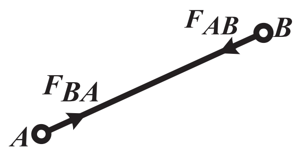
شتابی که یک جسم می‌گیرد، متناسب است با نیرویی که به آن وارد می‌شود:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$ رابطه (۱-۴)

قانون سوم

وقتی جسم A به جسم B نیروی F_{AB} را وارد کند، متقابلاً از جسم B هم به جسم A، نیروی F_{BA} وارد خواهد شد که مقدار آن برابر با F_{AB} و جهت آن مخالف F_{AB} است.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{AB}$$ رابطه (۲-۴)



شکل ۱-۴

۱- شیخ رئیس ابوعلی سینا، طبیعیات دانش‌نامه علائی، با مقدمه و حواشی و تصحیح سید محمد مشکوة، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، ص ۱۰.

واژه‌ای که نیازمند توضیح است، «دستگاه مختصات لخت» است. در واقع قانون اول نیوتن را می‌توانیم، تعریف دستگاه مختصات لخت در نظر بگیریم. قوانین نیوتن تنها در دستگاه مختصات لخت صحیح می‌باشد. طبق قانون اول ، دستگاه لخت، دستگاهی معرفی شده است که هر جسم ساکنی که به آن نیرویی وارد نمی‌شود، در این دستگاه ساکن باقی بماند. اگر نقطه‌ای از خود دستگاه لخت را انتخاب کنیم، با توجه به این که در دستگاه مختصات لخت، همواره ساکن است، پس باید به آن نیرویی وارد نشود. بنابراین می‌توانیم، نتیجه‌گیری کنیم که دستگاه لخت، دستگاهی است که به آن نیرویی وارد نمی‌شود. با این حساب شاید در طبیعت نتوانیم هیچ دستگاه لختی را بیابیم. مثلاً زمین نمی‌تواند دستگاه لخت باشد، چون خورشید به آن نیرو وارد می‌کند. خورشید هم نمی‌تواند دستگاه لخت باشد، چون مرکز کهکشان راه شیری به آن نیرو وارد می‌کند و... امّا واقعاً ما اینقدر هم سردرگم نخواهیم بود. موضوع کاملاً به دقتی که مورد نیاز ماست، بر می‌گردد.

یعنی به عنوان مثال تا حد قابل‌قبولی می‌توان زمین را دستگاه لخت در نظر گرفت. امّا اگر بخواهیم دقت‌مان خیلی بیش‌تر شود، مجبوریم مثلاً مرکز کهکشان راه شیری را دستگاه مختصات لخت فرض کنیم.

در قانون دوم نیوتن، با مفهومی به نام «جرم» روبه‌رو هستیم. در واقع جرم فعلاً چیزی در حد یک ضریب ثابت است. نام این ضریب ثابت را بهتر است، «جرم لختی» در نظر بگیریم. فرض کنید به جسم A نیروی F_A وارد کنیم و این جسم که جرم لختی‌اش m_A است، شتاب a بگیرد. به جسم B هم، با جرم لختی m_B به نحوی نیروی F_B را وارد می‌کنیم که شتاب a بگیرد.

$$F_A = m_A a$$
$$F_B = m_B a$$

حالا اگر A و B را به هم بچسبانیم و هم‌زمان A و B را با F_A و F_B بکشیم، قاعدتاً سیستم جدید ما با شتاب a حرکت خواهد کرد. در حالی که می‌دانیم مجموعاً نیروی $F_A + F_B$ به آن وارد شده است. پس جرم سیستم جدید (m_{A+B}) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$F_A + F_B = m_{A+B} a = m_A a + m_B a \Rightarrow m_{A+B} = m_A + m_B$$

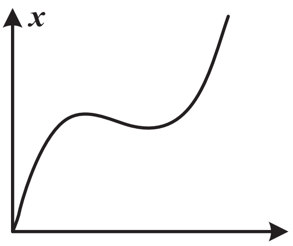
بنابراین حالا دیگر می‌توانیم بگوییم که این ضریبِ ثابت، یعنی جرم‌لختی، برای یک سیستم، حاصل جمع جبری جرم‌لختی تک‌تک اجزای آن می‌باشد، بنابراین جرم لختی به نوعی معرف مقدار ماده‌ی موجود در یک جسم است.

سرعت و شتاب

همان‌طور که دیدید در قوانین نیوتن حرف از شتاب وجود دارد که مناسب است، بحث کوتاهی در خصوص آن داشته باشیم. شتاب که با a نمایش داده می‌شود، نشان‌دهنده‌ی مقدار تغییرات سرعت، در واحد زمان است. شتاب متوسط به شکل زیر تعریف می‌شود:

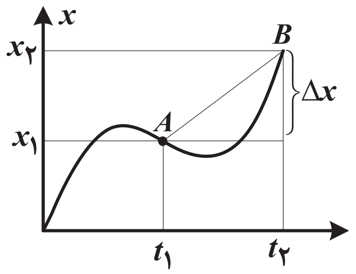
$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \qquad \text{رابطه (۳-۴)}$$

برای این‌که بهتر متوجه مفهوم شتاب شوید، به نمودار زیر توجه کنید.



شکل ۲-۴

در شکل ۲-۴، مکان یک ذره را بر حسب زمان مشاهده می‌کنید. این ذره در زمان $t_۱$ در نقطه‌ی $x_۱$ است و در زمان $t_۲$ به $x_۲$ می‌رسد. در نمودار زیر جابه‌جایی این ذره، از زمان $t_۱$ تا $t_۲$ با Δx مشخص شده است.



شکل ۳-۴

سرعت متوسط این ذره در مدت $t_۱$ تا $t_۲$ برابر است با:

$$\bar{v} = \frac{x(t_۲) - x(t_۱)}{t_۲ - t_۱} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{رابطه (۴-۴)}$$

مشخص است که $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ یعنی $\bar{v}$، شیب خط AB در نمودار شکل ۳-۱ است. هر چه $t_۲$ را به $t_۱$ نزدیک‌تر کنیم. سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای شبیه‌تر می‌شود و به عبارت دیگر، با نزدیک کردن نقطه‌ی B به A، شیب AB به شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی A نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین شیب نمودار $x - t$ (مکان بر حسب زمان) را در هر نقطه «سرعت لحظه‌ای» در نظر می‌گیریم و آن را با v نمایش می‌دهیم:

$$v = \lim_{t_۲ \to t_۱} \frac{x(t_۲) - x(t_۱)}{t_۲ - t_۱} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{رابطه (۵-۴)}$$

این مفهوم در واقع همان مفهوم مشتق است. بنابراین می‌توانیم، بگوییم که سرعت یک جسم برابر است با مشتق مکان آن جسم نسبت به زمان:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

مشتق یک تابع در یک نقطه، در واقع شیبِ خط مماس بر این تابع در آن نقطه است.

با صحبت‌هایی مشابه آن‌چه که گفته شد، می‌توانیم، شتاب لحظه‌ای را هم به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$a = \lim_{t_۲ \to t_۱} \frac{v(t_۲) - v(t_۱)}{t_۲ - t_۱} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{رابطه (۶-۴)}$$

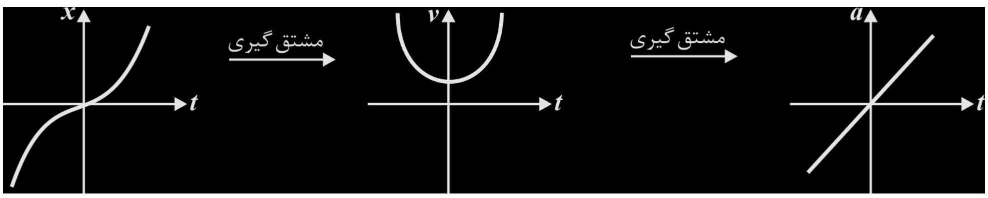
بنابراین شتاب لحظه‌ای هم، مشتق دوم مکان نسبت به زمان است. از این پس قرارداد می‌کنیم که مشتق اول هر تابع نسبت به زمان را با قراردادن یک نقطه بر روی آن و مشتق دوم آن نسبت به زمان را با دو نقطه روی آن مشخص کنیم. بنابراین v را با $\dot{x}$ و a را با $\ddot{x}$ نمایش خواهیم داد. (که به‌ترتیب، x نقطه و x دونقطه خوانده می‌شوند)

حال جسمی به جرم $۲kg$ درنظر بگیرید که مکان آن با $x = ۲t^۳ + ۶t$ مشخص می‌شود. در واقع مکان این جسم تابعی درجه سه از زمان است. با توجه به این که سرعت، مشتق اول مکان است، می‌دانیم:

$$v = \dot{x} = ۶t^۲ + ۶$$

بنابراین شتاب این جسم برابر است با:

$$a = \ddot{x} = ۱۲t$$



$x = ۲t^۳ + ۶t$ $\qquad$ $v = ۶t^۲ + ۶$ $\qquad$ $a = ۱۲t$

شکل ۴-۴

با توجه به قانون دوم نیوتون می‌دانیم که:

$$F = ma \Rightarrow \left| \overrightarrow{F} \right| = ۲ \times ۱۲t = ۲۴t$$

بنابراین نیرویی که به این جسم وارد می‌شود متناسب با t است و عامل این نوع حرکت، چنین نیرویی است.

بررسی حرکت اجسام

برای بررسی حرکت یک جسم در یک محیط، تنها کافی است که شکل برآیند نیروهای وارد بر آن را شناسایی کنیم.

نیروهایی که ما به بررسی آن‌ها می‌پردازیم یا تابع زمان هستند، یا تابع مکان جسم، نوشتن قانون دوم نیوتون پس از شناسایی شکل نیرو به یک «معادله‌ی دیفرانسیل» منجر می‌شود.

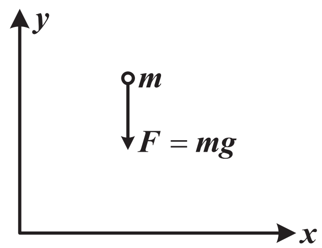
به معادلاتی که شامل یک تابع و مشتقات آن باشند، معادلات دیفرانسیل می‌گوییم.

مثلاً در بررسی حرکت اجسام هر گاه به معادله‌ای برسیم که در آن بعضی از $\ddot{x}$، $\dot{x}$، x و t وجود داشته باشند، به آن معادله‌ی دیفرانسیل می‌گوییم. هدف از حل یک معادله‌ی دیفرانسیل یافتن تابع x بر حسب t است.

معادلات دیفرانسیلی که در این فصل با آن‌ها روبه‌رو خواهیم شد، عموماً بسیار ساده هستند، که معمولاً جواب آن‌ها را با حدس زدن و آزمون و خطا نیز می‌توان به دست آورد. اما گاهی در حل برخی از مثال‌های این فصل، روش حل یک معادله‌ی دیفرانسیل نیز نوشته شده است که با دیدن این روش‌ها کم‌کم می‌توانید با حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل رایج آشنا شوید.

حرکت در میدان گرانشی

جسمی را در نزدیکی سطح زمین در نظر بگیرید. می‌دانیم که شتاب گرانش در حوالی سطح زمین، مقدار ثابت g، یعنی حدود ۹/۸ متر بر مجذور ثانیه است. به این جسم هیچ نیروی افقی وارد نمی‌شود و نیروی عمودی وارد بر آن در راستای محور y، و به سمت منفی وارد می‌شود.



شکل ۵- ۴

با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_y = m\ddot{y} \Rightarrow m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g$$
$$F_x = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = ۰ \Rightarrow \ddot{x} = ۰$$

حال باید این دو معادله‌ی دیفرانسیل ساده را حل کنیم.

در معادله‌ی اول می‌دانیم $\dot{y} = -gt + v_{y_۰}$ مجدداً می‌توان حدس زد که $y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{y_۰}t + y_۰$ خواهد بود. $v_{y_۰}$ و $y_۰$ مقادیر ثابتی هستند که به شرایط اولیه مسئله بستگی دارند.

حال بار دیگر این معادله دیفرانسیل را مرور می‌کنیم:

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \Rightarrow d\dot{y} = -gdt$$

با انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\dot{y} = -gt + v_{y_۰}$$

که $v_{y_\circ}$ در این جا ثابت انتگرال‌گیری نامعین است. اگر زمان را برابر صفر قرار دهیم، درمی‌یابیم که $\dot{y}=v_{y_\circ}$ بنابراین $v_{y_\circ}$ همان سرعت اولیه جسم در راستای عمودی است. (یعنی سرعت عمودی در لحظه‌ی $t=\circ$)

و نیز داریم:

$$\frac{dy}{dt}=-gt+v_{y_\circ}\Rightarrow dy=(-gt+v_{y_\circ})dt$$

مجدداً از طرفین معادله، انتگرال می‌گیریم:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{y_\circ}t+y_\circ$$ رابطه (۴-۷)

در رابطه اخیر نیز با قراردادن $t=\circ$ در می‌یابیم $y=y_\circ$ که $y_\circ$ مکان اولیه‌ی جسم است.

در بررسی حرکت افقی داریم:

$$\ddot{x}=\cdot\Rightarrow\frac{d\dot{x}}{dt}=\cdot\Rightarrow\dot{x}=v_{x_\circ}$$

که در این‌جا هم $v_{x_\circ}$ ثابت انتگرال‌گیری و نشان‌دهنده‌ی سرعت افقی اولیه است.

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=v_{x_\circ}\Rightarrow dx=v_{x_\circ}dt\Rightarrow x=v_{x_\circ}t+x_\circ$$ رابطه (۴-۸)

که باز هم $x_\circ$ ثابت انتگرال‌گیری است و به شرایطِ اولیه‌ی مسئله برمی‌گردد در اینجا $x_\circ$ مکان اولیه‌ی افقی است.

مثال ۱ـ جسمی را در زمانِ $t=\cdot$ با سرعتِ $۶\frac{m}{s}$ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. ارتفاع این جسم از سطح زمین (y) چه رابطه‌ای با زمان دارد. ارتفاع اوج این جسم چه‌قدر است؟

$$m\ddot{y}=-mg\Rightarrow\ddot{y}=-g$$

با حلِ معادله‌ی دیفرانسیل بالا داریم که:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{y_\circ}t+y_\circ$$

در این مسئله $y_\circ=\cdot$ و $v_{y_\circ}=+۶\frac{m}{s}$ است. در ضمن اگر g را $۱۰\frac{m}{s^{۲}}$ در نظر بگیریم:

$$y=-۵t^{۲}+۶t$$

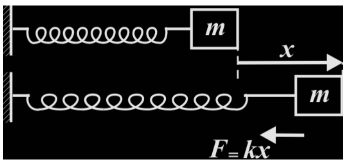
در ضمن می‌دانیم که سرعت این جسم ($\dot{y}$) در ارتفاع اوج صفر می‌شود:

$$\dot{y}=-۱۰t+۶=\circ\Rightarrow t=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

$$\rightarrow y=-۵(\frac{۳}{۵})^{۲}+۶\times\frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۵}=۱/۸m$$

حرکت جسم متصل به فنر

مطابق شکل زیر، جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به فنری با ضریب سختی k متصل شده است اگر جسم به اندازه‌ی x کشیده شود، نیروی فنر به اندازه‌ی $-kx$ به آن وارد می‌شود. علامت منفی به این خاطر گذاشته شده است که این نیرو در جهت مخالف جابه‌جایی x است.



شکل ۶-۴

فرض کنید فعلاً هیچ نیروی دیگری به این جسم وارد نشود، با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توانیم، بنویسیم که:

$$F=m\ddot{x}\Rightarrow -kx=m\ddot{x}\Rightarrow\ddot{x}=-\frac{k}{m}x$$ رابطه (۴-۹)

حل. معادله‌ی دیفرانسیل بالا به سهولت معادله‌ی دیفرانسیل‌های قبل نیست. امّا با کمی آزمون و خطا می‌توان جوابی برای این معادله حدس زد. ما می‌خواهیم $x(t)$ را بیابیم. شکل معادله‌ی دیفرانسیل به ما می‌گوید که $x(t)$ باید به گونه‌ای باشد که پس از دوبار مشتق‌گیری نسبت به زمان، برابر با حاصل‌ضرب یک ثابت منفی ($-\frac{k}{m}$) در خودش بشود. ممکن است کسی در نگاه اول حدس بزند که $x_{(t)} = e^{\alpha t}$. در این صورت:

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t} \Rightarrow \ddot{x} = \alpha^2 \underbrace{e^{\alpha t}}_{x} = \alpha^2 x$$

امّا α^2 مقداری مثبت است و نمی‌تواند $-\frac{k}{m}$ باشد. پیشنهاد بعدی یک تابع مثلثاتی، مانند sin یا cos است. به عنوان مثال: $x = A\cos(\omega t + \theta_0)$. در این‌صورت:

$$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x$$

با توجه به این‌که معادله‌ی اولیه‌ی ما $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ بود، پس $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

به چنین حرکتی که از معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل $\ddot{x} = -\omega^2 x$ به‌دست می‌آید، « نوسان هماهنگ ساده» می‌گوییم.

امّا در این‌جا هم، A و θ_0 هر مقداری می‌توانند داشته باشند. در واقع این مقادیر به شرایط اولیه‌ی ما بستگی دارند.

البته تنها راه حل این معادله دیفرانسیل، حدس زدن جواب آن نیست.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \dot{x}d\dot{x} = -\frac{k}{m}xdx \Rightarrow \int \dot{x}d\dot{x} = \int -\frac{k}{m}xdx \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\frac{k}{2m}x^2 + C$$

که در این‌جا C اولین ثابت انتگرال‌گیری ما است.

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\frac{k}{2m}x^2 + C \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2}} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2}} = \int dt$$

برای محاسبه‌ی $\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2}}$، مناسب است از تغییر متغییر $x = \sqrt{\frac{2Cm}{k}}\cos u$ استفاده کنیم.

$$\Rightarrow dx = -\sqrt{\frac{2Cm}{k}}\sin u\, du$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2}} = \int \frac{-\sqrt{\frac{2Cm}{k}}\sin u\, du}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}.\frac{2Cm}{k}\cos^2 u}} = \int \frac{-\sqrt{\frac{2Cm}{k}}\sin u\, du}{\sqrt{2C}\sqrt{1-\cos^2 u}}$$

$$\Rightarrow \int -\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\cancel{\sin u}\, du}{\cancel{\sin u}} = -\sqrt{\frac{m}{k}}\int du = \int dt$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{m}{k}}u + C' = t$$

در این‌جا C' دومین ثابت انتگرال‌گیری است.

$$\Rightarrow u = -\sqrt{\frac{k}{m}}(t - C')$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2Cm}{k}}\cos\left[-\sqrt{\frac{k}{m}}(t - C')\right] \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2Cm}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \sqrt{\frac{k}{m}}C'\right)$$

که می‌توانیم این گونه در نظر بگیریم:

$$A=\sqrt{\frac{۲Cm}{k}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \theta_{\circ}=-\sqrt{\frac{k}{m}}C'$$

$$\Rightarrow x=A\cos(\omega t+\theta_{\circ})$$ رابطه (۱۰-۴)

از آن‌جایی که $\cos(\omega t+\theta_{\circ})$ بین ۱+ و ۱- در نوسان خواهد بود پس x هم بین $+A$ و $-A$ تغییر خواهد کرد. به A دامنه‌ی نوسان و به ω بسامد زاویه‌ای می‌گوییم. $\theta_{\circ}$ هم نشان‌گر فاز اولیه است.

در ضمن برای محاسبه‌ی دوره تناوب این تابع مثلثاتی (T) می‌دانیم که:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\omega}=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ رابطه (۱۱-۴)

مثال ۲- فنری با ضریب سختی $۱۰\frac{N}{m}$ در نظر بگیرید. جسمی به جرم $۱۰۰g$ را به آن متصل می‌کنیم و پس آن‌که به اندازه‌ی $۱۰cm$ فنر را می‌کشیم، رها می‌کنیم. (فرض کنید هیچ نیرویی به جز نیروی فنر وجود نداشته باشد) بیش‌ترین سرعت این جسم در هنگام نوسان‌هایش چه‌قدر است.

حل. می‌دانیم که معادله‌ی حرکت این نوسان‌گر به‌صورت زیر است:

$$x=A\cos(\omega t+\theta_{\circ})$$

حالا باید A، ω و $\theta_{\circ}$ را به دست بیاوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۰/۱}}=۱۰s^{-۱}$$

در ضمن می‌دانیم که در $t=۰$، $x=۱۰\ cm$ و $\dot{x}=۰$.

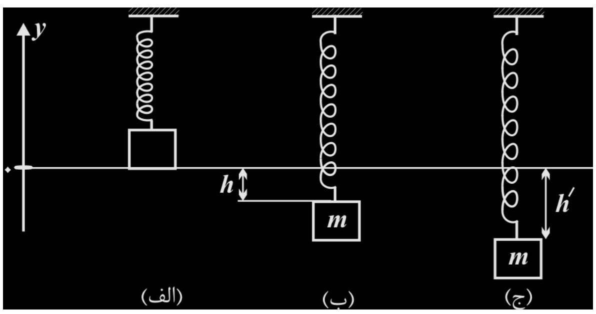
$$x=A\cos(\omega t+\theta_{\circ})$$
$$\Rightarrow \dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\theta_{\circ})\Rightarrow \dot{x}_{(t=۰)}=۰\Rightarrow \sin\theta_{\circ}=۰\Rightarrow \theta_{\circ}=۰$$
$$x_{(t=۰)}=۱۰cm\Rightarrow A=۱۰cm=۰/۱m$$
$$\Rightarrow x=۰/۱\cos(۱۰t)$$

معادله‌ی سرعت این جسم در هر لحظه به صورت زیر است:

$$\dot{x}=-\sin۱۰t$$

مشخص است که $\dot{x}$ بین ۱+ و ۱- تغییر می‌کند. بنابراین بیش‌ترین مقدار آن $۱\frac{m}{s}$ است.

مطابق شکل زیر فنری با سختی k در نظر بگیرید. فرض کنید این فنر بدون جرم باشد. حالت (الف) جرمی به فنر متصل نشده است. محور y را همان‌طور که در شکل می‌بینید در نظر می‌گیریم. پس از اتصال جسم (با جرم m) فنر در ارتفاع $-h$ در حالت تعادل قرار می‌گیرد. حالا جسم را، تا $-h'$ پایین می‌بریم و رها می‌کنیم.



شکل ۷-۴

در این‌جا علاوه بر نیروی فنر، نیروی گرانشی نیز وجود دارد:

$$m\ddot{y} = -ky - mg \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y - g$$

با یک تغییر متغیر می‌توانیم این معادله‌ی دیفرانسیل را به شکلی تبدیل کنیم که در حالت قبل (در غیاب گرانشی) داشته‌ایم.

$$y = y' - \frac{mg}{k} \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}' \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{y}'$$

$$\Rightarrow \ddot{y}' = -\frac{k}{m}(y' - \frac{m}{k}g) - g = -\frac{k}{m}y' + g - g = -\frac{ky'}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{y}' = -\frac{k}{m}y' \Rightarrow y' = A\cos(\omega t + \theta_\circ) \qquad , \qquad A = (h' - h)$$

تغییر متغیری که در این‌جا داریم در واقع انتقال نقطه‌ی صفر محور y به نقطه‌ی $-\frac{mg}{k}$ است. که برابر با همان نقطه‌ی $-h$ در شکل ۷ است. چون می‌دانیم، در حالت(ب) از شکل ۷ جسم در حالت تعادل است. و در این حالت نیروی فنر با نیروی گرانشی برابر است:

$$kh = mg \Rightarrow h = \frac{mg}{k}$$

نیروی گرانشی

دو جسم که در فاصله‌ی r از هم قرار دارند. نیروی جاذبه‌ای به هم وارد می‌کنند که با $\frac{1}{r^2}$ متناسب است. مقدار این نیرو از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad \text{رابطه (۱۲-۴)}$$

G در رابطه‌ی بالا مقدار ثابتی، معروف به «ثابت گرانش» است که مقدار آن $6/67\times10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$ است. امّا m_1 و m_2 در رابطه‌ی بالا «جرم گرانشی» جسم اول و دوم هستند. پیش از این در قانون دوم نیوتن با ضریب ثابتی با نام جرم لختی آشنا شدیم، امّا هیچ الزامی وجود ندارد که جرم لختی و جرم گرانشی با یک‌دیگر برابر باشند. البته بهتر است بگوییم که هیچ الزامی وجود ندارد که نسبت جرم لختی به جرم گرانشی برای همه‌ی اجسام برابر باشد. امّا واقعاً در طبیعت با هر دقتی که این دو جرم ثبت شده‌اند تا کنون مقادیر برابری داشته‌اند.

این موضوع یعنی برابری جرم لختی و جرم گرانشی در نسبیت عام تا حدّ یک اصل بالا برده شده است. ما در این‌جا، از این به بعد تمایزی بیان جرم لختی و گرانشی قائل نخواهیم شد و هر دو را تحت نام جرم در نظر خواهیم گرفت.

نیروی گرانشی در راستای خط واصل بین دو جسم به صورت جاذبه وارد می‌شود. کار اصلی ما در این فصل در واقع بررسی حرکت یک جسم تحت تأثیر نیروی گرانشی جسم دوم است. به شکل زیر توجه کنید. در این شکل، جسمی به جرم M در مرکز یک دستگاه لخت قرار دارد[1]. و جسمی به جرم m در فاصله‌ی r از آن است. بردار $\vec{r}$ را «بردار مکان» m می‌گوییم.

$$\vec{r} = r_x i + r_y j$$

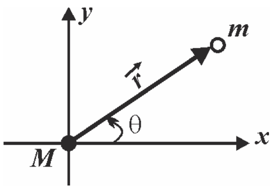
که r_x و r_y در واقع مؤلفه‌های $\vec{r}$ در راستای x و y هستند.

اگر زاویه‌ی $\vec{r}$ در هر لحظه با محور x، مقدار θ باشد، می‌دانیم که:

$$r_x = |\vec{r}|\cos\theta$$

$$r_y = |\vec{r}|\sin\theta$$

۱ - این‌که جسمی در مرکز یک دستگاه لخت ثابت باشد به معنی این است که نیرویی به آن وارد نمی‌شود. در حالی که می‌دانیم گرانشی وجود دارد. بنابراین فرض کنید به نحوی شرایط برای ثابت ماندن M در مرکز دستگاه فراهم شده است.



شکل ۸-۴

که منظورمان از $\left|\vec{r}\right|$ اندازه‌ی بردار $\vec{r}$ است. مقدار نیروی گرانشی که به جسم m وارد می‌شود، $\frac{GMm}{|\vec{r}|^{۲}}$ است که جهت آن به سمت $-\vec{r}$ می‌باشد. بنابراین اگر بخواهیم، نیروی وارد بر m را به‌صورت برداری نمایش دهیم، می‌توانیم از $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ کمک بگیریم. $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ برداری است با اندازه‌ی ۱ واحد و در جهت بردار $\vec{r}$. $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ را گاهی با $\hat{e}_r$ هم نمایش می‌دهند. حال می‌توانیم بگوییم که، نیرویی که به m وارد می‌شود برابر است با:

$$F=-\frac{GMm}{|\vec{r}|^{۲}}\hat{e}_r=-\frac{GMm}{|\vec{r}|^{۲}}\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=-\frac{GMm}{|\vec{r}|^{۳}}\vec{r}$$

طبق قانون دوم نیوتن می‌توانیم، بنویسیم:

$$-\frac{GMm}{|\vec{r}|^{۲}}\hat{e}_r=m\,\ddot{\vec{r}}$$

که $\ddot{\vec{r}}$ در واقع بردار شتاب جسم m است. چون طرف چپ در رابطه‌ی بالا برداری در جهت $-\hat{e}_r$ است پس $\ddot{\vec{r}}$ هم باید در همان جهت باشد. در ضمن می‌توانیم قانون دوم نیوتن را برای جسم m در راستای x و y به صورت جداگانه بنویسیم:

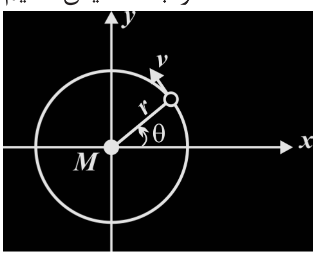
$$-\frac{GMm}{(r_x^{۲}+r_y^{۲})}\cos\theta=m\,\ddot{r}_x$$

$$-\frac{GMm}{(r_x^{۲}+r_y^{۲})}\sin\theta=m\,\ddot{r}_y$$

حل این معادلات دیفرانسیل به یافتن نحوه‌ی حرکت جسمی که تحت تأثیر نیروی گرانشی است منجر خواهد شد. ما فعلاً این مسئله را حل نشده باقی می‌گذاریم و به توضیح مباحثی که به نظر می‌رسد، فعلاً ضروری باشد، می‌پردازیم. سپس مجدداً مسئله‌ی دو جسم را مطرح خواهیم کرد.

حرکت دایره‌ای

تفکر اشتباهی که معمولاً درباره‌ی شتاب وجود دارد این است که شتاب، موجب تغییر اندازه‌ی سرعت می‌شود. در حالی که در واقع شتاب، موجب تغییر بردار سرعت می‌شود. این تغییر در بردار سرعت، گاهی جهت آن را تغییر نمی‌دهد و تنها اندازه‌ی سرعت را تغییر می‌دهد و گاهی هم جهت سرعت و هم مقدار سرعت را تغییر می‌دهد. در ضمن، شتابی که به یک جسم وارد می‌شود در حالت خاصی می‌تواند، مقدار سرعت را ثابت نگه دارد و تنها جهت آن را تغییر دهد. در شکل زیر جسمی را مشاهده می‌کنید که در حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت v است. فاصله‌ی این جسم از مرکز دستگاه مختصات را با r نمایش دهیم.



شکل ۹-۴

چون فرض کرده‌ایم که این جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، پس «سرعت زاویه‌ای» آن هم ثابت است. سرعت زاویه‌ای را با ω نمایش می‌دهیم.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dot{\theta}$$

برای جسمی که در شکل n می‌بینید، $\dot{\theta}$، مقداری ثابت است. اگر تناوب حرکت این جسم (یعنی مدت زمان یک دور گردش آن را) با T نمایش دهیم. می‌توانیم بنویسیم.

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$$

در ضمن می‌دانیم که:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = r \times \frac{2\pi}{T} = r\omega = r\dot{\theta}$$

بردار مکان این جسم را، $\vec{r}$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}$$

می‌توانیم بردار سرعت و شتاب این جسم را محاسبه کنیم:

$$\dot{\vec{r}} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} + r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j}$$

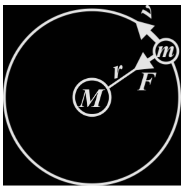
$$\ddot{\vec{r}} = -r\,\dot{\theta}^2\cos\theta\,\hat{i} - r\,\dot{\theta}^2\sin\theta\,\hat{j} = -\dot{\theta}^2(r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}) = -\dot{\theta}^2\,\vec{r}$$

بنابراین بردار شتاب این جسم در جهت $-\vec{r}$ یعنی به سمت مرکز دستگاه مختصات است. و مقدار آن $r\,\dot{\theta}^2$ می‌باشد. به این شتاب، شتاب مرکزگرا می‌گوییم:

$$a = r\,\dot{\theta}^2 = r\omega^2 = r\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{v^2}{r}$$ رابطه (۱۳-۴)

چیزی که محاسبه کردیم نشان‌گر این است که اگر بخواهیم، جسمی با سرعت ثابت v یک حرکت دایره‌ای با شعاع r داشته باشد. باید شتابی به اندازه‌ی $\frac{v^2}{r}$ به طرف مرکز دایره داشته باشد. به عبارت دیگر اگر جرم این جسم را با m نشان دهیم باید نیرویی به اندازه‌ی $\frac{mv^2}{r}$ به آن وارد شود. به این مقدار « نیروی مرکزگرا» می‌گوییم. دقت کنید که منظور از نیروی مرکزگرا این است که هر جایی در طبیعت ما شاهد یک حرکت دایره‌ای باشیم، قطعاً نیرویی به اندازه‌ی $\frac{mv^2}{r}$ عامل آن بوده است. مثلاً در حرکت‌های سیارات، گرانش تأمین‌کننده‌ی این نیرو است.

مطابق شکل زیر، جسمی به جرم m را می‌بینید که به دور جسمی با جرم M در حال حرکت دایره‌ای است.



شکل ۱۰-۴

با توجه به این‌که گرانش عامل حرکت دایره‌ای جرم m شده است. می‌توانیم بگوییم:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$ رابطه (۱۴-۴)

در ضمن می‌دانیم که:

$$v=\frac{۲\pi r}{P}$$

که در رابطه‌ی بالا P تناوب جسم است.

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\frac{۲\pi r}{P}\Rightarrow\frac{GM}{r}=\frac{۴\pi^{۲}r^{۲}}{P^{۲}}\Rightarrow P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{GM}r^{۳}$$ رابطه (۱۵-۴)

مثال ۳ ـ ایستگاه فضایی تقریباً هر ۹۰ دقیقه یک بار به دور زمین می‌چرخد. اگر مدار آن را دایره‌ای در نظر بگیریم، فاصله‌ی آن تا سطح زمین چقدر است؟ (جرم زمین $۶\times ۱۰^{۲۴}kg$ است.)

حل.

$$P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{GM_{\oplus}}r^{۳}\longrightarrow r^{۳}=\frac{P^{۲}GM_{\oplus}}{۴\pi^{۲}}\longrightarrow r\simeq ۶۷۰۰\,Km$$

با توجه به این‌که شعاع زمین تقریباً $۶۴۰۰\ Km$ است پس فاصله‌ی ایستگاه فضایی تا سطح زمین در حدود $۳۰۰\ Km$ می‌شود.

مثال ۴ـ زمین هر ۳۶۵/۲۵ روز یک بار در مداری که تقریباً دایره‌ای است به دور خورشید می‌گردد. فاصله‌ی زمین تا خورشید (یک واحد نجومی) چقدر است؟(جرم خورشید $۲\times ۱۰^{۳۰}kg$ است.)

حل.

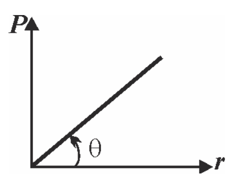
$$P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{GM_{\odot}}r^{۳}\longrightarrow r^{۳}=\frac{P^{۲}GM_{\odot}}{۴\pi^{۲}}\longrightarrow r=۱/۵\times ۱۰^{۱۱}m$$

مثال ۵ ـ ستارگانی را درون یک کهکشان در نظر بگیرید. فرض کنید به هر ستاره نیرویی به اندازه‌ی $\frac{mk}{r}$ به طرف مرکز کهکشان وارد می‌شود که r فاصله‌ی ستاره تا مرکز کهکشان، m جرمِ ستاره و k مقداری ثابت است. اگر همه‌ی این اجرام در مدارهای دایره‌ای به دور مرکز کهکشان بچرخند نمودار P بر حسب r را رسم کنید. (P دوره‌ی تناوب است.)

حل. در این حالت نیرویی که مقدار آن $\frac{mk}{r}$ است، تأمین‌کننده‌ی شتاب لازم برای این حرکت دایره‌ای است.

$$\frac{mk}{r}=\frac{mv^{۲}}{r}\Rightarrow v=\sqrt{k}=\frac{۲\pi r}{P}\Rightarrow P=\frac{۲\pi}{\sqrt{k}}r$$

با توجه به رابطه‌ی p و r مشخص است، که دوره‌ی تناوب در این کهکشان با افزایشِ فاصله به صورتِ خطی تغییر می‌کند. بنابراین نمودارِ p-r به‌صورتِ زیر است.



$$\tan\theta=\frac{۲\pi}{\sqrt{k}}$$

مثال ۶ـ فرض کنید نیروی گرانش میان دو جسم به صورت $\frac{Gm_1m_2}{r^{\alpha}}$ باشد. (α مقداری ثابت است) در یک منظومه‌ی ستاره‌ای که در آن نیروی گرانش به این شکل است. ناظری که در یک سیاره است، متوجه حرکت هیچ یک از سیارات دیگر نسبت به هم نمی‌شود، α را به دست آورید.

حل. متوجه نشدن حرکت سایر سیارات به این علت است که سرعت زاویه‌ای تمام سیارات یکسان است. یعنی دوره تناوب گردشِ آن‌ها به دور ستاره‌ی مرکزی یکسان است. اگر جرم ستاره‌ی مرکزی را M در نظر بگیریم:

$$\frac{GMm}{r^{\alpha}}=\frac{mv^2}{r}\Rightarrow v^2=GMr^{(1-\alpha)}$$

$$v=\frac{2\pi r}{P}\Rightarrow\frac{4\pi^2r^2}{P^2}=GMr^{(1-\alpha)}$$

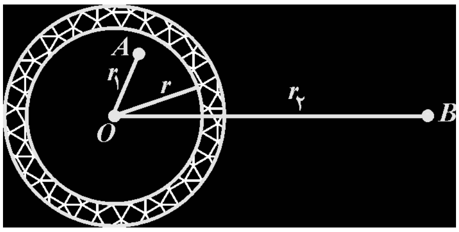
$$\Rightarrow P^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^{(1+\alpha)}$$

برای این‌که تمام سیارات دارای تناوبی برابر باشند. باید P را بتوان مستقل از r به‌دست آورد. یعنی P نباید وابسته به r باشد. پس $1+\alpha$ باید صفر شود:

$$1+\alpha=0\Rightarrow\ \alpha=-1$$

قضیه پوسته‌های گرانشی

این قضیه در واقع دو موضوع را برای پوسته‌های گرانشی بیان می‌کند. پوسته‌ی نازکی در نظر بگیرید که شعاع آن r است. فرض کنید جرم این پوسته به صورت همگن در آن پخش شده باشد (به شکل زیر نگاه کنید)



شکل ۱۱-۴

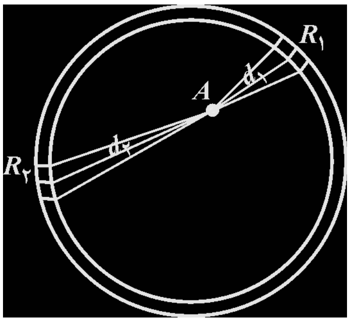
الف) به جسمی که در نقطه‌ی A ($r_1<r$) قرار دارد، هیچ نیرویی از جانب پوسته وارد نمی‌شود.

ب) نیرویی که به جسمی که در نقطه‌ی B $(r_2>r)$ وارد می‌شود، شبیه به وضعیتی است، که تمام جرم پوسته در نقطه‌ی O قرار داشته باشد. یعنی اگر جرم پوسته را m در نظر بگیریم. شتابی که پوسته به جسمی در B وارد می‌کند برابر است با: $\frac{Gm}{r_2^2}$

اثبات قضیه‌ی پوسته‌های گرانشی

هر قسمت کوچک از پوسته، نیرویی به طرف خود ایجاد می‌کند. برای یافتن برآیند نیروهایی که از جانب کل پوسته وارد می‌شود، باید از نیروهای جزءهای کوچک جرم انتگرال بگیریم. ما در این‌جا با یک روشی ساده‌تر تنها بخش (الف) را اثبات می‌کنیم.

به شکل ۱۲-۴ توجه کنید. فرض کنید جسمی به جرم m_A در نقطه‌ی A قرار گرفته باشد. یک دایره‌ی کوچک با شعاع R_1 در فاصله‌ی d_1 از نقطه‌ی A را در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۲-۴

فرض کنید این دایره‌ی کوچک که بخشی از پوسته است دارای جرم m_1 باشد. می‌دانیم که m_1 جرم m_A را به طرف خود جذب می‌کند.

اگر لبه‌های این دایره‌ی کوچک را به نقطه‌ی A رسم کنیم و امتداد دهیم. در آن سوی کره دایره‌ی کوچک دیگری با شعاع R_2 و در فاصله‌ی d_2 از نقطه‌ی A به وجود می‌آورد. جرم این دایره را m_2 در نظر می‌گیریم و مشخص است که m_2 هم m_A را به طرف خود جذب می‌کند.

حالا می‌خواهیم ثابت کنیم نیروی گرانشی m_1 و m_2 هم‌دیگر را خنثی می‌کنند.

مقدار نیروهای m_1 و m_2 به‌ترتیب برابر است با $\frac{Gm_1m_A}{d_1^2}$ و $\frac{Gm_2m_A}{d_2^2}$. از طرفی می‌دانیم دایره‌ای که جرمش m_1 است، مساحتی برابر با πR_1^2 و دایره‌ای که جرمش m_2 است مساحتی برابر با πR_2^2 دارد. با توجه به این‌که پوسته را همگن (یعنی دارای توزیع یکنواخت جرم) فرض کرده‌ایم. پس می‌توان گفت:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

در ضمن با توجه به هندسه‌ی مسئله می‌دانیم که:

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \Rightarrow m_1=m_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

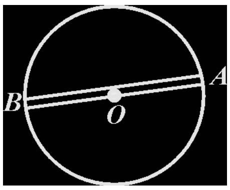
مقدار نیروی m_1 را با $|F_1|$ و مقدار نیروی m_2 را با $|F_2|$ نشان دهیم:

$$|F_1|=\frac{Gm_1m_A}{d_1^2}=\frac{Gm_A}{d_1^2}\times m_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=\frac{Gm_2m_A}{d_2^2}=|F_2|$$

در ضمن می‌دانیم جهت این نیروها عکس هم می‌باشد. پس:

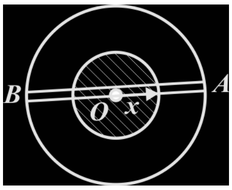
$$\overrightarrow{F_1}=-\overrightarrow{F_2}$$

مثال ۷ـ فرض کنید تونلی درون زمین حفر کنیم که از مرکز زمین بگذرد و مانند شکل زیر نقطه‌ی A را به B وصل کند. جسمی را در نقطه‌ی A رها می‌کنیم. چه‌قدر طول می‌کشد تا به نقطه‌ی B برسد. (فرض کنید چگالی زمین مقدار ثابت ρ است).



شکل ۱۳-۴

جرم جسم را با m نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم در فاصله‌ی x از مرکز زمین قرار داشته باشد. طبق قضیه‌ی پوسته‌ی گرانشی، تنها نیرویی که به جسم وارد می‌شود، از طرف کره‌ی درونی (یعنی کره‌ای که شعاعش r است) می‌باشد. مشخص است که قطر تونل را قابل صرف‌نظر فرض کرده‌ایم.



شکل ۱۴-۴

محور x را در امتداد AB به گونه‌ای در نظر بگیرید که صفر آن در مرکز کره باشد. جرم کره‌ای که شعاع آن x است را با $m_{(x)}$ نمایش می‌دهیم. مشخص است که وقتی جسم در نقطه‌ی x قرار داشته باشد به آن نیروی F وارد می‌شود که در جهت $-x$ است و مقدار آن برابر است با:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{Gm_{(x)}m}{x^{۲}}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$m_{(x)} = \rho\times\frac{۴}{۳}\pi x^{۳}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}\right| = \frac{Gm}{x^{۲}}\times\rho\times\frac{۴}{۳}\pi x^{۳} = \frac{۴}{۳}G\pi\rho m x$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$\vec{F} = -\frac{۴}{۳}G\pi\rho m x$$

$\frac{۴}{۳}G\pi\rho m$ مقداری ثابت است که آن را با k نمایش می‌دهیم.

$$\Rightarrow F = -kx$$

مشخص است که شکل نیرو، شبیه نیرویی است که پیش از این در فنر دیده بودیم و می‌دانیم که با حل معادله‌ی دیفرانسیل $m\ddot{x} = -kx$، بسامد زاویه‌ای این حرکت هماهنگ ساده، $\sqrt{\frac{k}{m}}$ خواهد شد.

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{۴}{۳}G\pi\rho m}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\sqrt{\frac{۴}{۳}G\pi\rho}}$$

چگالی زمین (ρ) برابر است با: $۵۵۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$

$$\Rightarrow T = ۵۱۰۰s = ۱/۴h$$

این مدت برابر با زمانی است که جسم از A به B می‌رود و بر می‌گردد. بنابراین مدتی که طول می‌کشد تا به B برسد، نصف T یعنی $۰/۷h$ خواهد بود.

انرژی

پیش از این گفتیم که، با استفاده از قوانین نیوتن کاری که ما انجام خواهیم داد، حل کردن معادله دیفرانسیل $F = m\ddot{x}$ خواهد بود. اگر بخواهیم به صورت دقیق‌تر صحبت کنیم، معادله دیفرانسیل ما به شکل زیر است:

$$\vec{F}_{(\vec{r})} = m\ddot{\vec{r}}$$

دقت کنید که $\overrightarrow{F}$ را تابعی از $\vec{r}$ در نظر گرفته‌ایم. یعنی دامنه‌ی بحث خود را به نیروهایی منحصر کرده‌ایم که تنها تابع مکان هستند. مشخص است که برای حل معادله دیفرانسیل بالا نیاز به دوبار انتگرال‌گیری هستیم. به عنوان نمونه می‌توانید به حل معادله دیفرانسیل حرکت فنر رجوع کنید. در اینجا می‌خواهیم این انتگرال‌گیری را تنها یک بار انجام دهیم و به این وسیله کمیت تازه‌ای را تعریف کنیم.

$$\overrightarrow{F}_{(\vec{r})} = m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}.\frac{d\vec{r}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}.\vec{v}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} = m\vec{v}.d\vec{v} \Rightarrow \int_{r_۱}^{r_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} = \int_{v_۱}^{v_۲} m\vec{v}.d\vec{v}$$

$$\Rightarrow \int_{r_۱}^{r_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} = \frac{۱}{۲}m\vec{v}.\vec{v}\Big|_{v_۱}^{v_۲} = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$\frac{۱}{۲}mv^۲$ را انرژی جنبشی می‌نامیم و با K نمایش می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$K_۲ - K_۱ = \int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} \qquad \text{رابطه (۱۶-۴)}$$

$K_۱$ و $K_۲$ کمیت‌هایی هستند که به ترتیب مربوط به نقاط $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$ می‌باشند.

$\int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r}$ را کار لازم برای جابجایی جسم از $\vec{r}_۱$ به $\vec{r}_۲$ در نظر می‌گیریم به معادله‌ی (۱۶-۱) قضیه‌ی کار و انرژی گفته می‌شود. قضیه کار و انرژی بیان‌گر این موضوع می‌باشد که : «کار لازم برای جابه‌جایی جسمی از $\vec{r}_۱$ به $\vec{r}_۲$ برابر است با اختلاف انرژی جنبشی جسم در این دو نقطه».

کار لازم برای جابه‌جایی جسم از $\vec{r}_۱$ به $\vec{r}_۲$ ممکن است به مسیر حرکت وابسته باشد. ما دامنه‌ی صحبت خود را به نیروهایی محدود می‌کنیم که انتگرال آن‌ها تابع مسیر نباشد و تنها نقطه‌ی ابتدا و انتها مشخص‌کننده‌ی کار باشد. به چنین نیروهایی «نیروی بایستار» می‌گوییم.

اکنون برای نوشتن $\int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r}$ می‌توانیم از یک نقطه‌ی مبدأ ($\vec{r}_۰$) استفاده کنیم:

$$K_۲ - K_۱ = \int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} = \int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۰}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} + \int_{\vec{r}_۰}^{\vec{r}_۲}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r}$$

$$= \int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۰}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r} - \int_{\vec{r}_۲}^{\vec{r}_۰}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r}$$

$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_۰}\overrightarrow{F}_{(\vec{r})}.d\vec{r}$ را انرژی پتانسیل می‌نامیم و با U_i نمایش می‌دهیم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$K_۲ - K_۱ = U_۱ - U_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲ \qquad \text{رابطه (۱۷- ۴)}$$

به معادله‌ی (۱۷- ۴) « قانون پایستگی انرژی» می‌گوییم. مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی را با E نمایش می‌دهیم. قانون پایستگی انرژی می‌گوید تا زمانی که نیروها پایستار باشند. E برای یک مجموعه ثابت خواهند ماند.

$E=U+K=$مقداری ثابت

ممکن است این سؤال برای‌تان پیش بیاید که اگر واقعاً انرژی چیزی بیش‌تر از انتگرال اول نیرو نیست و خودمان آن را تعریف کرده‌ایم، پس چرا برای گرما هم ما اصطلاح « انرژی» را به کار می‌بریم؟! این موضوع به این بر می‌گردد که انرژی درون اجسام در واقع چیزی جز مجموع انرژی جنبشی ذرات آن نمی‌باشد.

نکته‌ای که حتماً باید حواسمان به آن باشد این است که انرژی پتانسیل کاملاً وابسته به مبداء سنجش (یعنی همان $\vec{r_0}$) است. امّا اختلاف انرژی پتانسیل ($U_2 - U_1$) ارتباطی با $\vec{r_0}$ ندارد. بنابراین اگر بخواهیم، نگاه مشترکی به انرژی پتانسیل داشته باشیم باید $\vec{r_0}$ را به صورت قراردادی مکان خاصی در نظر بگیریم. معمولاً $\vec{r_0}$ جایی اتخاذ می‌شود که اثر نیرو در آن صفر باشد. مثلاً اگر بخواهیم انرژی پتانسیل گرانشی را به دست آوریم، r_0 را باید بی‌نهایت در نظر بگیریم، با توجه به این توضیحات و آن‌چه که به عنوان کار تعریف کردیم، می‌توانیم بگوییم که انرژی پتانسیل گرانشی جسم m در فاصله‌ی r از جسمی با جرم M عبارت است از منفی کار لازم برای آوردن m از بی‌نهایت به فاصله‌ی r از جسم M.

انرژی پتانسیل گرانشی

به شکل ۱۵-۴ توجه کنید. می‌خواهیم انرژی پتانسیل گرانشی دو جسم به جرم m_1 و m_2 وقتی در فاصله‌ی r از هم قرار گرفته‌اند را به دست بیاوریم.

شکل ۱۵-۴

m_1 را ثابت در نظر می‌گیریم. حالا کافی است کار لازم برای آوردن m_2 از بی‌نهایت به فاصله‌ی r از m_1 را محاسبه کنیم. انرژی پتانسیل گرانشی منفی این مقدار خواهد بود:

$$U = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}_{(\vec{r})} . d\vec{r}$$

دقت کنید که $\vec{F}_{(\vec{r})} . d\vec{r}$ ضرب نقطه‌ای $\vec{F}$ و $d\vec{r}$ می‌باشد که برابر است با $\left|\vec{F}_{(\vec{r})}\right| . \left|d\vec{r}\right| \cos\theta$. با توجه به این‌که نیروی گرانشی در جهت $-\vec{r}$ است در این‌جا $\cos\theta = -1$.

$$\Rightarrow U = -\int_{\infty}^{r} \left(-\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\right) dr = \int_{\infty}^{r} \frac{Gm_1 m_2 dr}{r^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r}\Bigg|_{\infty}^{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \qquad \text{رابطه (۱۸-۴)}$$

مثال ۸- دو جسم با جرمی برابر m در نظر بگیرید. فرض کنید این دو جسم در فاصله‌ی بسیار زیادی از هم قرار گرفته و تقریباً ساکن باشند. به واسطه‌ی نیروی گرانشی که بین آن‌ها وجود دارد کم‌کم شروع به حرکت می‌کنند و به هم نزدیک می‌شوند. وقتی در فاصله‌ی d از هم هستند، سرعت هر یک چقدر خواهد بود؟

حل. با توجه به این‌که در لحظه‌ی اول فاصله‌ی دو جسم از هم خیلی زیاد است و تقریباً ساکن هستند، پس انرژی پتانسیل و جنبشی آن‌ها تقریباً صفر است. در هنگامی که دو جسم به فاصله‌ی d از هم می‌رسند، طبق تقارنی که وجود دارد. باید سرعت‌شان با هم برابر باشد.

طبق قانون پایستگی انرژی، داریم که:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow 0 + 0 = -G\frac{m^2}{d} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

دقت کنید که عبارت مربوط به انرژی پتانسیل یعنی $-G\frac{m^2}{d}$ باید تنها یک بار نوشته شود. گاهی به اشتباه تصور می‌شود همان‌طور که هر کدام از این دو جسم یک انرژی جنبشی دارد، یک انرژی پتانسیل دارد بنابراین باید $-G\frac{m^2}{d}$ را برای مجموعه دوبار بنویسیم. در حالی که انرژی پتانسیل وقتی موجود خواهد بود که هر دو جسم باشند و در واقع $-G\frac{m^2}{d}$ انرژی پتانسیل گرانشی مجموعه‌ی این دو جسم است.

$$\Rightarrow \frac{Gm^2}{d} = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{d}}$$

مثال ۹ ـ جسمی کروی با شعاع R و جرم M در نظر بگیرید. جسمِ کوچکی به جرم m را با چه سرعتی $(v_\circ)$ از روی سطح آن پرتاب کنیم تا بتواند از میدان گرانشی جسم M رهایی یابد؟

حل. برای رها شدن جسم m از قید گرانش جسم M نیاز است که انرژی لازم برای رسیدن به فاصله‌ی بسیار دور (یعنی جایی که انرژی پتانسیل گرانشی صفر است) را داشته باشد.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow U_۱ + K_۱ = U_۲ + K_۲$$

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{۱}{۲}mv_\circ^۲ = ۰ + K_۲ \Rightarrow v_\circ = \sqrt{\frac{۲GM}{R} + \frac{۲K_۲}{m}}$$

$K_۲$ در رابطه‌ی بالا انرژی جنبشی جسم در بی‌نهایت است. اگر حداقل مقدار $V_\circ$ را بخواهیم، $K_۲$ را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow v_\circ = \sqrt{\frac{۲GM}{R}}$$

به این مقدار «سرعت فرار» می‌گویند. اگر جسم m را با هر سرعت بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{\frac{۲GM}{R}}$ پرتاب کنیم از گرانش جسم M فرار خواهد کرد.

مثال ۱۰ـ جسمی با جرم M باید دارای چه شعاعی باشد تا سرعت فرار بر روی سطح آن برابر با سرعت نور (c) باشد؟ این شعاع را برای خورشید محاسبه کنید.

حل. کافی است سرعت فرار را برابر با c قرار دهیم:

$$c = \sqrt{\frac{۲GM}{R}} \longrightarrow c^۲ = \frac{۲GM}{R} \Rightarrow R = \frac{۲GM}{c^۲}$$

به این شعاع، «شعاع شوارتزشیلد» یا « افق رویداد» گفته می‌شود. وقتی سرعت فرار یک جسم از سرعت نور بیش‌تر باشد، به این معنی است که حتی نور هم نمی‌تواند از سطح آن فرار کند، در چنین حالتی جسم تبدیل به « سیاهچاله» می‌شود.

شعاع شوارتزشیلد برای خورشید:

$$R = \frac{۲GM_\odot}{c^۲} \simeq ۳\,km$$

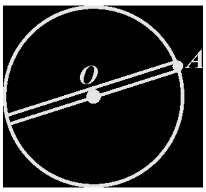
یعنی اگر خورشید آن‌قدر منقبض شود که شعاع آن ۳ km گردد، تبدیل به سیاهچاله می‌شود.

انرژی پتانسیل فنر

می‌خواهیم، انرژی پتانسیل جسمی به جرم m وقتی به یک فنر با ضریب سختی k متصل و به اندازه‌ی x کشیده شده است را به دست آوریم. مبدأ انرژی پتانسیل فنر را نقطه‌ی $x = ۰$ در نظر می‌گیریم. اکنون باید کار لازم برای کشیدن فنر به اندازه‌ی x را محاسبه کنیم.

$$U = -\int_\circ^x F_{(x)}dx = -\int_\circ^x (-kx)dx = \int_\circ^x kx\,dx = \frac{۱}{۲}kx^۲\Big|_\circ^x = \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad \text{رابطه (۱۹-۴)}$$

مثال ۱۱ـ در مثال ۷ جسم در مرکز زمین چه سرعتی خواهد داشت؟



حل. متوجه شدیم شکل نیرویی که به آن جسم وارد می‌شود، $-kx$ یعنی شبیه نیروی فنر است. بنابراین انرژی پتانسیل هم در آن حالت $\frac{۱}{۲}kx^۲$ خواهد بود.

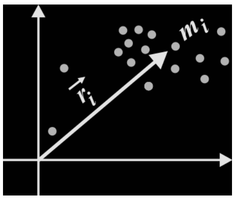
طبق قانون پایستگی انرژی، انرژی جسم وقتی در نقطه‌ی A قرار دارد با انرژی آن در O برابر است.

$$E_A = E_O \Rightarrow U_A + K_A = U_O + K_O \Rightarrow \frac{۱}{۲}kR_\oplus^۲ + \circ = \circ + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}R = \sqrt{\frac{۴}{۳}G\pi\rho}R_\oplus = ۷/۹\frac{km}{s}$$

قضیه‌ی مرکز جرم

در دستگاه مختصات زیر، n جرم نقطه‌ای در نظر بگیرید که بردار مکان جسم i ام را با $\vec{r_i}$ و جرم آن را با m_i نشان می‌دهیم.



شکل ۱۶- ۴

برای این مجموعه از ذرات، بردار مکان مرکز جرم ($\overrightarrow{r}_{cm}$) را به این‌صورت تعریف می‌کنیم.

$$\overrightarrow{r}_{Cm}=\frac{m_1\overrightarrow{r}_1+m_2\overrightarrow{r}_2+\ldots+m_n\overrightarrow{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{r_i}}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$ رابطه (۴-۲۰)

مرکز جرم در واقع یک نوع میانگین‌گیری از مکان تک‌تک ذرات این مجموعه است. اگر جرم کل ($\sum_{i=1}^{n}m_i$) را با M نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$M\overrightarrow{r_{cm}}=m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{r_n}$$ رابطه (۴-۲۱)

از طرفین نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$M\dot{\overrightarrow{r_{cm}}}=m_1\dot{\overrightarrow{r_1}}+m_2\dot{\overrightarrow{r_2}}+\ldots+m_n\dot{\overrightarrow{r_n}}$$

حاصل ضرب جرم یک ذره در بردار سرعت آن را «تکانه» می‌نامیم و معمولاً با $\overrightarrow{p}$ نمایش می‌دهیم:

$$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}$$ رابطه (۴-۲۲)

بنابراین می‌توانیم بگوییم:

$$M\dot{\overrightarrow{r_{cm}}}=\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\ldots+\overrightarrow{p_n}=\sum_{i=1}\overrightarrow{p_i}$$ رابطه (۴-۲۳)

موضوعی که اکنون گفتن آن ضروری به نظر می‌رسد این است که شکل صحیح‌تر قانون دوم نیوتن به‌صورت زیر است:

$$\overrightarrow{F}=\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

با توجه به این‌که $\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}$، اگر جرم یک جسم تغییر نکند مشخص است که:

$$\overrightarrow{F}=\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}=m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}=m\overrightarrow{a}$$

که همان چیزی است که پیش از این نیز گفته بودیم. امّا در حالت کلی نمی‌شود از تغییرات جرم صرف‌نظر کرد.

$$\overrightarrow{F}=\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}=m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}+\overrightarrow{v}\frac{dm}{dt}=m\overrightarrow{a}+\overrightarrow{v}\dot{m}$$

دقت کنید که $\overrightarrow{v}\dot{m}$ مربوط به زمانی است که جرم متغیر باشد. از آن‌جایی که ما معمولاً با سیستم‌هایی روبه‌رو هستیم که تغییری در جرم آن‌ها به وجود نمی‌آید، پس به کار بردن رابطه‌ی $\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}$ غلط نیست امّا باید در حالت کلی بدانیم که شکل صحیح قانون دوم نیوتن به صورت $\overrightarrow{F}=\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$ است.

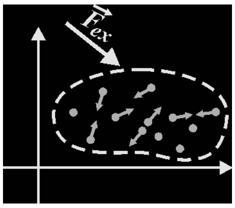
حالا یک بار دیگر به رابطه‌ی (۲۱-۴) نگاه کنید. با دوبار مشتق‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$M\overrightarrow{\ddot{r}_{cm}} = m_1\overrightarrow{\ddot{r}_1} + m_2\overrightarrow{\ddot{r}_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{\ddot{r}_n}$$

$m_i\overrightarrow{\ddot{r}_i}$ در واقع نیرویی است که به ذره‌ی i ام وارد می‌شود. اگر این مقدار را، با $\overrightarrow{F_i}$ نمایش دهیم. می‌توانیم بنویسیم:

$$M\overrightarrow{\ddot{r}_{cm}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}$$ رابطه (۲۴-۴)

به شکل ۱۷-۴ که نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی ذراتمان می‌باشد توجه کنید.



شکل ۱۷-۴

مشخص است که نیروهایی که به این n ذره وارد می‌شود یا نیروی خارجی $(\overrightarrow{F}ex)$ می‌باشد، یا نیرویی درونی $(\overrightarrow{F}in)$ است. منظور از نیروهای درونی نیروهایی است که ذرات درون مجموعه به هم وارد می‌کنند. طبق قانون سوم نیوتن می‌دانیم که وقتی ذره‌ی ۱ به ذره‌ی ۲، نیروی $\overrightarrow{F_{12}}$ را وارد می‌کند، از ذره‌ی۲ هم به ذره‌ی ۱، نیروی $\overrightarrow{F_{21}}$ وارد خواهد شد که: $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$

بنابراین در یک مجموعه از ذرات، مجموع نیروهایی که خود ذرات به یک‌دیگر وارد می‌کنند، صفر خواهد بود. یعنی:

$$\overrightarrow{F}in = 0$$

پس مجموع نیروهایی که به تک‌تک ذرات وارد می‌شود، تنها برابر با نیروی خارجی خواهد بود:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{F_{ex}}$$

بنابراین رابطه‌ی (۲۴-۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\overrightarrow{F_{ex}} = M\overrightarrow{\ddot{r}_{cm}}$$ رابطه (۲۵-۴)

یک نتیجه‌ی بسیار جالب رابطه‌ی بالا این است که اگر نیروی خارجی‌ای به مجموعه‌ای از ذرات وارد نشود، مرکز جرم مجموعه شتابی نخواهد داشت و در نتیجه سرعت مرکز جرم ($\overrightarrow{\dot{r}_{cm}}$) ثابت خواهد بود. پس با توجه به رابطه‌ی (۲۳-۴) می‌توان گفت که مجموع تکانه‌های ذرات ثابت خواهد بود:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \ldots + \overrightarrow{p_n} = \text{مقداری ثابت}$$ رابطه (۲۶-۴)

رابطه‌ی بالا که به « قانون پایستگی تکانه» معروف است، بیان می‌کند که هر گاه به مجموعه‌ای از ذرات نیروی خارجی‌ای وارد نشود. کل تکانه‌ی سیستم ثابت خواهد ماند.

مثال ۱۲ـ در مثال ۸ دو جسمی که از فاصله‌ی بسیار دور به واسطه‌ی جاذبه‌ی‌شان به هم نزدیک می‌شدند، جرم‌هایی برابر داشتند. حال فرض کنید که جرم‌های این دو جسم m_1 و m_2 باشد. در این صورت وقتی به فاصله‌ی d از هم می‌رسند، به ترتیب سرعت این اجرام (یعنی v_1 و v_2) چه مقدار خواهد بود؟

مجدداً می‌توانیم از قانون پایستگی انرژی استفاده کنیم.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow 0 + 0 = -\frac{Gm_1m_2}{d} + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$
$$\Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{d} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

مشخص است که v_1 و v_2 دو مجهول هستند و به تنهایی با رابطه‌ی بالا قابل محاسبه نیستند. بنابراین ما نیازمند رابطه‌ی دیگری هم بین v_1 و v_2 هستیم که آن را با استفاده از قانون پایستگی تکانه به دست خواهیم آورد. مشخص است که جسم m_1 و m_2 تنها تحت

تأثیر نیروی گرانش یک‌دیگر هستند. بنابراین نیروی خارجی‌ای وجود ندارد. پس باید مجموعه‌ی تکانه‌ی آن‌ها مقداری ثابت باقی بماند. در لحظه‌ی اولیه هر دو جسم ثابت هستند. بنابراین تکانه‌ی‌شان صفر است. پس در هنگامی که به فاصله‌ی d از هم می‌رسند، باید مجموع بردارهای تکانه صفر باشد.

$$m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}=0\Rightarrow\overrightarrow{v_2}=-\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{v_1}\Rightarrow\left|\overrightarrow{v_2}\right|=\frac{m_1}{m_2}\left|\overrightarrow{v_1}\right|$$

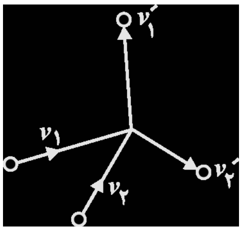
$$\Rightarrow\frac{Gm_1m_2}{d}=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2}v_1\right)^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}v_1^2$$

$$\Rightarrow\frac{Gm_2}{d}=\frac{1}{2}v_1^2+\frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}v_1^2=\frac{1}{2}v_1^2\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)$$

$$\Rightarrow v_1^2=\frac{2Gm_2^2}{d\,(m_1+m_2)}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2Gm_2^2}{d\,(m_1+m_2)}}$$

$$v_2=\frac{m_1}{m_2}v_1\Rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2Gm_1^2}{d\,(m_1+m_2)}}$$

یکی از کاربردهای قانون پایستگی تکانه در مسائل مربوط به «برخورد» می‌باشد. دو جسم با جرم‌های m_1 و m_2 را تصور کنید که با سرعت v_1 و v_2 به یک‌دیگر برخورد می‌کنند و پس از برخورد سرعت‌های v_1' و v_2' را پیدا می‌کنند.



شکل ۱۸-۴

مشخص است که در لحظات بسیار کوتاه برخورد، این اجسام به یک‌دیگر نیرویی وارد می‌کنند که موجب تغییرات بردار سرعت‌شان می‌شود. امّا یافتن شکل آن نیرو و هم‌چنین مدت اثر آن بسیار دشوار است.

کار بسیار ساده‌تری که ما می‌توانیم انجام دهیم، استفاده از قانون پایستگی تکانه است. زیرا مشخص است که تمام نیروها داخلی هستند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}=m_1\overrightarrow{v_1'}+m_2\overrightarrow{v_2'}$$ رابطه (۲۷-۴)

هنگامی که $\overrightarrow{v_1'}$ و $\overrightarrow{v_2'}$ هر دو مجهول باشند. رابطه‌ی بالا به تنهایی نمی‌تواند مشخص‌کننده‌ی $\overrightarrow{v_1'}$ و $\overrightarrow{v_2'}$ باشد. بنابراین ما برای حل مسائل برخورد نیازمند اطلاعات بیش‌تری از نحوه‌ی برخورد هستیم.

گاهی اوقات برخورد به گونه‌ای است که هیچ انرژی‌ای در هنگام برخورد تلف نمی‌شود. به این دسته از برخوردها کشسان یا «الاستیک کامل» می‌گویند. در این صورت می‌توانیم به وسیله‌ی قانون پایستگی انرژی بگوییم:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$ رابطه (۲۸-۴)

که رابطه‌ی (۲۸-۴) باعث می‌شود، بتوانیم v_1' و v_2' را محاسبه کنیم.

گاهی برخورد به گونه‌ای است که دو جسم پس از برخورد به یک‌دیگر می‌چسبند. (مانند پرتاب توده‌ای از گِل به یک توپ) به این برخوردها « غیرالاستیک کامل» می‌گویند. مشخص است که در این صورت v_1' و v_2' با هم برابر خواهند بود و به سادگی می‌توانیم با معادله‌ی (۲۷-۴) آن را محاسبه کنیم.

قوانین کپلر

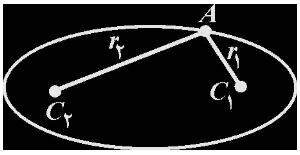
قبل از آن‌که بخواهیم به بررسی دقیق حرکت اجرام سماوی به واسطه‌ی نیروی گرانش بپردازیم، اشاره‌ای می‌کنیم به قوانین سه‌گانه‌ای که یوهان کپلر بر اساس رصد حرکت ظاهری سیارات بیان کرده بود.

قانون اول: مسیر حرکت سیارات به دور خورشید یک بیضی است که خورشید در یکی از کانون‌های آن قرار دارد.

بیضی به مجموعه نقاطی می‌گویند که مجموع فاصله‌ی آن از دو نقطه‌ی خاص (کانون‌های بیضی) مقدارِ خاصی باشد.

به شکل زیر توجه کنید C_1 و C_2 کانون‌های بیضی هستند. اگر هر نقطه‌ی دلخواه مانند A را به C_1 و C_2 متصل کنیم. مجموع r_1 و r_2 مقداری ثابت است[1].

$$r_1 + r_2 = \text{مقداری ثابت}$$

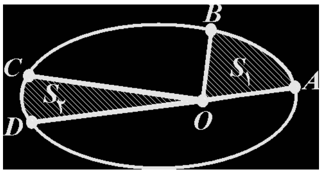


شکل ۱۹-۴

این مقدار ثابت را با $2a$ در نظر می‌گیریم و به a نیم‌محور بیضی می‌گوییم. دقت کنید که یک دایره هم نوعی بیضی است که کانون‌های آن بر هم منطبق شده‌اند و نیم‌محور آن برابر با شعاع دایره است.

قانون دوم: شعاع حامل سیاره در زمان‌های برابر مساحت‌های مساوی را جارو می‌کند. (شعاع حامل سیاره، پاره‌خطی است که از سیاره به خورشید متصل می‌شود).

در شکل زیر مدار یک سیاره به دور خورشید را مشاهده می‌کنید. (O نشان‌دهنده‌ی محل خورشید است.) قانون دوم کپلر بیان می‌کند که اگر سیاره در مدت زمانی از A به B برود و این زمان برابر باشد با زمانی که از C به D می‌رسد، در این صورت S_1 با S_2 برابر خواهد بود.



شکل ۲۰-۴

قانون سوم: اگر دوره تناوب مدار یک سیاره را با P و نیم‌محور آن را با a نمایش دهیم:

$$P^2 \propto a^3$$

یا به عبارت دیگر اگر دو سیاره‌ی مختلف را با هم مقایسه کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3}$$

رابطه (۲۹-۴)

این قوانین را کپلر به عنوان یک واقعیت فیزیکی بیان کرد و دلیلی برای آن‌ها عنوان نکرد. بعدها که نیوتون قوانین سه‌گانه‌ی خود را همراه با گرانش بیان نمود، مشاهده شد بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از جمله همین سه قانون کپلر به‌وسیله‌ی قوانین نیوتن قابل استخراج هستند. به عبارت دیگر قوانین نیوتن، قوانین عام‌تری هستند و به زودی خواهید دید که به وسیله‌ی قوانین نیوتن، قوانین کپلر را اثبات خواهیم کرد.

مثال ۱۳ ـ نیم محور بزرگ سیاره‌ی مشتری $5/2\ AU$ است. دوره تناوب این سیاره چقدر است؟

حل. طبق قانون سوم کپلر می‌دانیم که:

$$\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3}$$

۱- برای کسب اطلاعات بیش‌تر در خصوص بیضی به قسمت مقاطع مخروطی از همین فصل رجوع کنید.

در واقع قانون سوم کپلر می‌گوید که توان سوم نیم محور بزرگ با توان دوم دوره تناوب رابطه‌ی مستقیم دارد. اگر نیم‌محور بزرگ و دوره تناوب هر سیاره‌ی منظومه‌ی شمسی را با زمین مقایسه کنیم، خواهیم داشت:

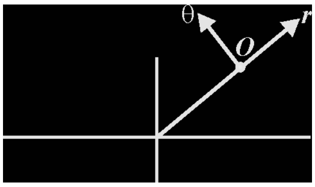
$$\frac{P^{۲}}{a^{۳}}=\frac{(\text{۱سال})^{۲}}{(\text{۱واحد نجومی})^{۳}} \Rightarrow P^{۲}_{(\text{برحسب سال})}=a^{۳}_{(AU\,\text{برحسب})}$$

$$\xrightarrow{\text{برای مشتری}} P^{۲}=(۵/۲)^{۳} \Rightarrow P \simeq ۱۲\,\text{سال}$$

دستگاه مختصات قطبیِ تخت

در فضای دوبعدی تاکنون ما از دستگاه مختصات دکارتی استفاده می‌کردیم. این دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود بر هم x و y است. حال می‌خواهیم دستگاه مختصات تازه‌ای به نام دستگاه مختصات « قطبی تخت» را معرفی کنیم، که در بسیاری از مواقع کار را راحت‌تر خواهد کرد.

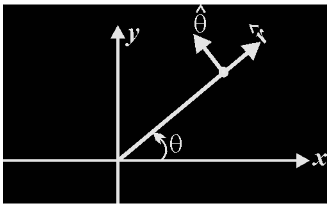
به شکل ۲۱-۴ توجه کنید. فرض کنید که جسمی در نقطه‌ی O قرار گرفته است. محور r را در جهت بردار مکان این جسم و محور θ را عمود بر r و به صورت پادساعت‌گرد قرار می‌دهیم.



شکل ۲۱-۴

مشخص است که با تغییر مکان جسم، محل محورهای r و θ هم تغییر می‌کند و این در نگاه اول پیچیدگی فراوانی را در دستگاه مختصات قطبی تخت نشان می‌دهد. امّا این دستگاه مختصات در بسیاری از موارد هم موجب ساده‌تر شدن امور می‌شود. مثلاً وقتی با یک نیروی مرکزی روبه‌رو باشیم، همواره جهت نیرو در راستای محور r خواهد بود.

مانند شکل ۲۲-۴، جسمی را در نظر بگیرید که بردار مکان آن با محور x زاویه‌ی θ می‌سازد.



شکل ۲۲-۴

همان‌طور که در شکل ۲۲-۴ می‌بینید، بردارهای یکه‌ی $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ را می‌توانیم در نظر بگیریم. بردارهای یکه، در واقع بردارهایی با طول واحد در جهت محورهای مختصات هستند. پیش از این ما با i و j (یا $\hat{x}$ و $\hat{y}$) که بردارهای یکه در دستگاه دکارتی بودند، آشنا شده بودیم.

مشخص است که:

$$\hat{r}=\cos\theta\, i+\sin\theta\, j \qquad \text{رابطه (۳۰-۴)}$$

$$\hat{\theta}=-\sin\theta\, i+\cos\theta\, j \qquad \text{رابطه (۳۱-۴)}$$

مختصات نقطه‌ی که از مرکز دستگاه فاصله‌ی r دارد در دستگاه مختصات قطبی تخت به شکل زیر است:

$$\vec{r}=r\,\hat{r} \qquad \text{رابطه (۳۲-۴)}$$

و طبق رابطه‌ی (۳۰-۴) می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{r}=r(\cos\theta\, i+\sin\theta\, j)=r\cos\theta\, i+r\sin\theta\, j$$

رابطه‌ی بالا همان نمایش بردار مکان جسم در دستگاه دکارتی است که پیش از این نیز دیده بودیم.

چیزی که در دستگاه دکارتی کار را برای ما ساده می‌کند، ثابت بودن i و j است. در دستگاه قطبی تخت، $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بردارهای ثابتی نیستند. یکی از نتایج این موضوع این است که دیگر مشتق آن‌ها نسبت به زمان صفر نخواهد بود. بنابراین مشتق $r\hat{r}$ نسبت به زمان $\dot{r}\hat{r}$ نمی‌شود. حال می‌خواهیم، $\frac{d\hat{r}}{dt}$ و $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ را به‌دست بیاوریم. با توجه به روابط (۳۰-۴) و (۳۱-۴) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta i+\sin\theta j)=-\sin\theta\dot{\theta}i+\cos\theta\dot{\theta}j$$

$$=\dot{\theta}(-\sin\theta i+\cos\theta j)=\dot{\theta}\hat{\theta}\Rightarrow\frac{d\hat{r}}{dt}=\dot{\theta}\hat{\theta}$$ رابطه (۳۳-۴)

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\frac{d}{dt}(-\sin\theta i+\cos\theta j)=-\cos\theta\dot{\theta}i-\sin\theta\dot{\theta}j)$$

$$=-\dot{\theta}(\cos\theta i+\sin\theta j)=-\dot{\theta}\hat{r}\Rightarrow\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\dot{\theta}\hat{r}$$ رابطه (۳۴-۴)

حال می‌توانیم، بردار سرعت و شتاب یک جسم را در دستگاه مختصات قطبی تخت به دست آوریم.

$$\vec{r}=r\hat{r}$$

$$\Rightarrow\dot{\vec{r}}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\hat{r}}{dt}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}\Rightarrow\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$$ رابطه (۳۵-۴)

$$\Rightarrow\ddot{\vec{r}}=\frac{d(\dot{r}\hat{r})}{dt}+\frac{d(r\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt}=\frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r}+\dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}+\frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta}+r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}-r\dot{\theta}^{۲}\hat{r}\Rightarrow\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{۲})\hat{r}+(r\ddot{\theta}+۲\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$ رابطه (۳۶-۴)

	دستگاه دکارتی	دستگاه قطبی تخت
$\vec{r}$	$r_x i+r_y j$	$r\hat{r}$
$\dot{\vec{r}}$	$\dot{r}_x i+\dot{r}_y j$	$\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$
$\ddot{\vec{r}}$	$\ddot{r}_x i+\ddot{r}_y j$	$(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{۲})\hat{r}+(r\ddot{\theta}+۲\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

به‌عنوان مثال می‌خواهیم، شتاب مرکزگرا را در دستگاه مختصات قطبی تخت به دست آوریم. خصوصیات این حرکت این است که r و $\dot{\theta}$ ثابت است.

$$\Rightarrow\dot{r}=\ddot{r}=\ddot{\theta}=۰$$

$$\Rightarrow\ddot{\vec{r}}=(۰-r\dot{\theta}^{۲})\hat{r}+(۰+۰)\hat{\theta}\Rightarrow\ddot{\vec{r}}=-r\dot{\theta}^{۲}\hat{r}$$

مشاهده می‌کنید که رابطه‌ی (۱۳-۴)، همان چیزی که در دستگاه دکارتی به‌دست آوردیم، این‌جا به وسیله‌ی دستگاه مختصات قطبی تخت خیلی ساده‌تر قابل محاسبه است.

تکانه‌ی زاویه‌ای

متوجه شدیم که شتاب یک جسم در دستگاه مختصات قطبی تخت دارای دو مؤلفه است. یک مؤلفه در جهت $\hat{r}$ که به آن شتاب شعاعی می‌گوییم و مقدار آن $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{۲})$ است. و یک مؤلفه‌ی دیگر آن در جهت $\hat{\theta}$ است که به آن شتاب مماسی می‌گوییم و مقدار آن $(r\ddot{\theta}+۲\dot{r}\dot{\theta})$ است.

حال جسمی را در صفحه‌ی مختصات در نظر بگیرید که نیرویی شعاعی به آن وارد می‌شود، یعنی نیرویی که در راستای شعاعی است (نیروی گرانش از این جنس می‌باشد) این نیروی شعاعی را با $\vec{F}$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{F}=F_r\hat{r}$$

با توجه به این‌که نیرو موجب شتاب می‌شود می‌توانیم بگوییم:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_r.\hat{r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{F_r}{m} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

این موضوع مشخص است که طبق قانون دوم نیوتن وقتی هیچ نیروی مماسی به جسم وارد نمی‌شود، شتاب مماسی باید صفر باشد یعنی $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$.

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت ($r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$) برابر است با $\dfrac{1}{r}\dfrac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$.

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

این مقدار ثابت را با h نمایش می‌دهیم:

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{رابطه (۳۷-۴)}$$

حالا یک بار به بردار سرعت در دستگاه قطبی تخت نگاه کنید.

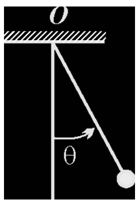
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

بخشی از سرعت که در جهت $\hat{r}$ می‌باشد را سرعت شعاعی می‌گوییم و بخشی از سرعت که در جهت $\hat{\theta}$ است را سرعت مماسی می‌گوییم. مشخص است که مقدار سرعت مماسی $r\dot{\theta}$ است که ما آن را با v_t نمایش می‌دهیم.
حالا اگر به رابطه‌ی (۳۷-۴) توجه کنید، متوجه می‌شوید که:

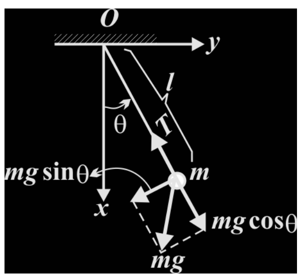
$$r^2\dot{\theta} = r.r\dot{\theta} = rv_t = h$$

رابطه‌ی آخر نشان می‌دهد که هر گاه نیرویی به صورت شعاعی به ذره‌ای وارد شود، حاصل‌ضرب مقدار سرعت مماسی و فاصله‌ی جسم تا مرکز دستگاه مختصات همواره مقداری ثابت است. به عبارت دیگر اندازه‌ی بردار ($\vec{r} \times \vec{v}$) همواره ثابت خواهد ماند.

مثال ۱۴- آونگی به طول l که جسمی به جرم m به آن متصل شده است. را به اندازه‌ی θ از حالت عمودی منحرف می‌کنیم و رها می‌کنیم. تناوب این آونگ چه‌قدر است. (فرض کنید θ زاویه‌ی کوچکی باشد و بتوان از توان‌های بالاتر از یک آن صرف‌نظر کرد).
حل. می‌خواهیم این مسئله را به وسیله‌ی دستگاه مختصات قطبی تخت حل کنیم.



نقطه‌ی O را مرکز دستگاه مختصات در نظر می‌گیریم محور x و y را به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم، نیرویی که به جرم m وارد می‌شود، نیروی وزن (mg)و نیروی کشش سیم آونگ (T) است.



$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = (mg\cos\theta - T)\hat{r} - mg\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = (g\cos\theta - \frac{T}{m})\hat{r} - g\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g\cos\theta - \dfrac{T}{m} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -g\sin\theta \end{cases}$$

چون طول آونگ ثابت است. $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ صفر است.

$$\Rightarrow \begin{cases} -r\dot{\theta}^{۲} = g\cos\theta - \dfrac{T}{m} \\ r\ddot{\theta} = -g\sin\theta \end{cases}$$

از آن‌جایی که مقدار T را نمی‌دانیم از معادله‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$r\ddot{\theta} = -g\sin\theta \Rightarrow l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

در ضمن می‌دانیم که:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^{۳}}{۳!} + \frac{\theta^{۵}}{۵!} - \frac{\theta^{۷}}{۷!} + \dots$$

اگر θ زاویه‌ی کوچکی باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$\Rightarrow l\ddot{\theta} = -g\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-g}{l}\theta$$

معادله‌ی دیفرانسیل بالا، نشان‌دهنده‌ی یک نوسان هماهنگ ساده است که بسامد آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

بردارهای تکانه‌ی زاویه ($\vec{L}$) و گشتاور ($\vec{\tau}$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad \text{رابطه (۴-۳۸)}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{رابطه (۴-۳۹)}$$

می‌خواهیم $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\,(\vec{v} \times \vec{v}) + m\,(\vec{r} \times \vec{a})$$

ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است. بنابراین:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad \text{رابطه (۴-۴۰)}$$

نتیجه‌ی نهایی نشان می‌دهد که: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$. با توجه به این‌که τ (گشتاور) ضرب خارجی $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. هر گاه این دو بردار در یک جهت باشند، یعنی نیرو به صورت شعاعی باشد، گشتاور صفر است. بنابراین $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ هم صفر خواهد بود. که این به معنی ثابت بودن بردار $\vec{L}$ (تکانه‌ی زاویه‌ای) است. البته این موضوع را پیش از این هم متوجه شده بودیم که حاصل‌ضرب سرعت مماسی در فاصله تا مرکز در مسائلی که در آن‌ها نیرو فقط شعاعی است، ثابت خواهد بود. این موضوع به عنوان قانون «پایستگی تکانه زاویه‌ای» شناخته می‌شود.

مسئله‌ی دو جسم

دو جسم کروی با جرم M و m را در نظر بگیرید که در مکان‌های $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$ در یک دستگاه مختصات لخت قرار گرفته‌اند. بردار مکان مرکز جرم $(\vec{r}_{cm})$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M\vec{r}_۱ + m\vec{r}_۲}{M + m} = \frac{\vec{r}_۱}{۱ + \dfrac{m}{M}} + \frac{\vec{r}_۲}{\dfrac{M}{m} + ۱}$$

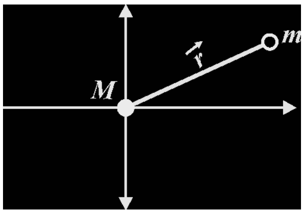
طبق قضیه‌ی مرکز جرم می‌دانیم که اگر نیروی خارجی‌ای به این دو جسم وارد شود $\ddot{\vec{r}}_{cm}$ صفر خواهد بود. یعنی مرکز جرم این مجموعه شتابی ندارد و می‌توانیم از دستگاه مرکز جرم به عنوان یک دستگاه مختصات لخت استفاده کنیم. تلاشی که برای یافتن دستگاه‌های مختصات لخت داریم به این دلیل است که استفاده از قانون دوم نیوتن تنها در دستگاه مختصات لخت مجاز است.

برای این‌که کمی کار ساده‌تر شود. فرض می‌کنیم که جرم M به مراتب از جرم m بزرگ‌تر باشد، البته این فرض، فرض بدی نخواهد بود. زیرا بسیاری از سیستم‌هایی که در طبیعت با آن‌ها روبه‌رو هستیم به همین شکل هستند. مثلاً جرم خورشید بیش از ۳۰۰/۰۰۰ برابر جرم زمین است.

اگر m به مراتب از M کوچک‌تر باشد، آن‌گاه مرکز جرم سیستم تقریباًدر مرکز جسم M قرار می‌گیرد.

$$\lim_{\frac{m}{M}\to 0} \vec{r}_{cm} = \lim_{\frac{m}{M}\to 0} \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = \lim_{\frac{m}{M}\to 0}\left[\frac{\vec{r}_1}{1+\frac{m}{M}} + \frac{\vec{r}_2}{\frac{M}{m}+1}\right] = \vec{r}_1$$

حال می‌خواهیم حرکت جسم m را در میدان گرانشی جسم M به‌دست آوریم:



شکل ۲۳-۴

می‌دانیم که این دو جسم به هم نیروی $F_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ را وارد می‌کنند. برای سهولت کار، شتاب جسم m را در دستگاه مختصات قطبی تخت می‌نویسیم:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

با حل معادلات دیفرانسیل بالا می‌توانیم مسئله‌ی دو جسم را حل کنیم پیش از این دیدیم که صفر بودن شتاب مماسی به قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای منتهی می‌شود:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = h = \text{ثابت}$$

به h «تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم» می‌گوییم. در ادامه قصدمان این است که معادله‌ی زیر را با دانستن قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای حل کنیم:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

برای این‌که محاسبات‌مان ساده‌تر شوند، $\frac{1}{r}$ را به‌صورت u نمایش می‌دهیم.

$$r^2\dot{\theta} = h \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{u^2} = h$$

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \dot{r} = \frac{-\dot{u}}{u^2}\ ,\ \dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{-\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta}$$

مشتق u نسبت به θ را با u' نمایش می‌دهیم:

$$\Rightarrow \dot{r} = -hu' \Rightarrow \ddot{r} = -h\frac{du'}{dt} = -h\frac{du'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{du'}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\xrightarrow{\dot{\theta}=hu^2} \ddot{r} = -h^2u^2\frac{du'}{d\theta}$$

$\frac{du'}{d\theta}$ در واقع مشتق دوم u نسبت به θ است که آن را با u'' نمایش می‌دهیم.

$$\Rightarrow \ddot{r} = -h^2u^2u''$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \xrightarrow{\ddot{r}=-h^2u^2u'' \,,\ \dot{\theta}=hu^2 \,,\ \frac{1}{r}=u}$$

$$-h^2u^2u'' - \frac{1}{u}h^2u^4 = -GMu^2$$

$$\Rightarrow -h^2u'' - h^2u = -GM \Rightarrow u'' = \frac{GM}{h^2} - u$$

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل بالا، از یک تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$z = \frac{GM}{h^2} - u$$

اگر مشتق اول و دوم z نسبت به θ را به ترتیب با z' و z'' نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$z = \frac{GM}{h^2} - u \Rightarrow z' = -u' \Rightarrow z'' = -u''$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$u'' = \frac{GM}{h^2} - u$$

با جاگذاری z و z'' در این رابطه خواهیم داشت:

$$-z'' = z \Rightarrow z'' = -z$$

معادله‌ی دیفرانسیل بالا نشان‌دهنده‌ی یک حرکت هماهنگ ساده است که جواب آن به صورت زیر است:

$$z = A\cos(\theta + \theta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{h^2} - u = A\cos(\theta + \theta_0)$$

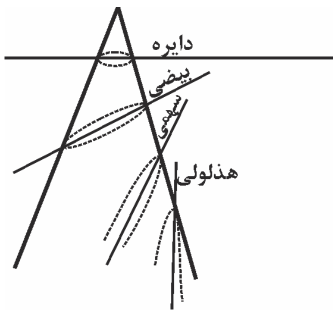
$$\Rightarrow u = \frac{GM}{h^2} - A\cos(\theta + \theta_0) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}\left[1 - \frac{Ah^2}{GM}\cos(\theta + \theta_0)\right]$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 - \frac{Ah^2}{GM}\cos(\theta + \theta_0)}$$ رابطه (۴-۴۱)

معادله‌ی نهایی نشان‌دهنده‌ی نحوه‌ی حرکت جسم m در اثر نیروی گرانشی جسم M است. با توضیح مختصری که در خصوص مقاطع مخروطی می‌دهیم، خواهید دید که این شکل حرکت $\left(r = \frac{l_0}{1 + e\cos\theta}\right)$ نشان‌دهنده‌ی دایره، بیضی، سهمی و یا هذلولی است.

مقاطع مخروطی

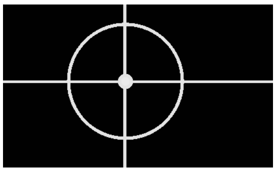
قطع کردن یک مخروط بوسیله‌ی یک صفحه مجموعه‌ای از خم‌ها را به وجود می‌آورد که به آن‌ها مقاطع مخروطی می‌گوییم.



شکل ۲۴-۴

۱- دایره

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه (مرکز دایره) مقداری ثابت (R) باشد.



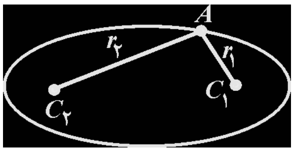
شکل ۲۵-۴

از آن‌جایی که فاصله‌ی همه‌ی نقاط دایره تا مرکز دستگاه مختصات R است.
معادله‌ی آن در دستگاه مختصاتِ قطبی تخت به شکل زیر خواهد بود.

رابطه (۴۲-۴) $\boxed{r = R}$

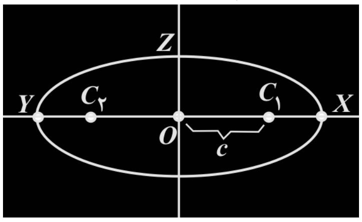
۲- بیضی

پیش از این توضیحات مختصری در خصوص بیضی داده بودیم. بیضی مجموعه نقاطی از یک صفحه است که مجموع فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه‌ی خاص (کانون‌های بیضی)، مقداری ثابت باشد. در شکل زیر کانون‌های بیضی با $C_۱$ و $C_۲$ مشخص شده است. فاصله‌ی نقطه‌ی A از $C_۱$ و $C_۲$ به ترتیب $r_۱$ و $r_۲$ است.



شکل ۲۶-۴

مجموع $r_۱$ و $r_۲$ که مقداری ثابت است را با $۲a$ نشان می‌دهیم. در شکل زیر نقطه‌ی O مرکز بیضی است. هر چه فاصله‌ی نقاط $C_۱$ و $C_۲$ از O بیش‌تر باشد، بیضی ما کشیده‌تر می‌شود. فاصله‌ی O و $C_۱$ برابر است با فاصله‌ی O و $C_۲$. این مقدار را با c نمایش می‌دهیم.



شکل ۲۷-۴

می‌دانیم برای هر نقطه از بیضی $r_۱ + r_۲$ با $۲a$ برابر است. اگر نقطه‌ی X را در نظر بگیریم:

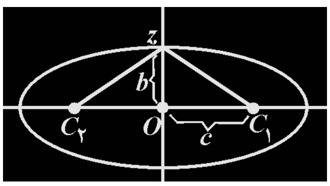
$$\overline{C_۱X} + \overline{C_۲X} = ۲a$$

از طرفی می‌دانیم که $\overline{C_۱X}$ با $\overline{YC_۲}$ برابر است:

$$\Rightarrow \overline{YC_۲} + \overline{C_۲X} = \overline{YX} = ۲a$$

بنابراین متوجه می‌شویم که فاصله‌ی نقطه‌ی O تا X برابر با a خواهد بود. به این دلیل به a «نیم محور بزرگ بیضی» می‌گوییم.
به همین شکل OZ را هم نیم‌محور کوچک بیضی می‌نامیم و با b نمایش می‌دهیم. برای نقطه‌ی Z هم می‌توانیم بگوییم:

$$\overline{ZC_۱} + \overline{ZC_۲} = ۲a$$



شکل ۲۸-۴

از طرفی به خاطر تقارنی که وجود دارد می‌دانیم که مثلث $\overset{\Delta}{C_۱ZC_۲}$ متساوی‌الساقین است و $\overline{ZC_۱}$ با $\overline{ZC_۲}$ برابر است.

$$\Rightarrow ۲\overline{ZC_۱} = ۲a \Rightarrow \overline{ZC_۱} = a$$

با توجه به این‌که مثلث $\overset{\Delta}{OC_۱Z}$ قائم‌الزاویه است، می‌توانیم بنویسیم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

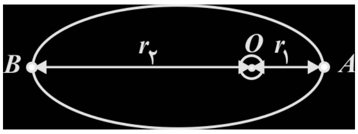
$\frac{c}{a}$ را با e نمایش می‌دهیم و به آن، «خروج از مرکز» می‌گوییم.

$$\frac{c}{a} = e \Rightarrow c = ae$$

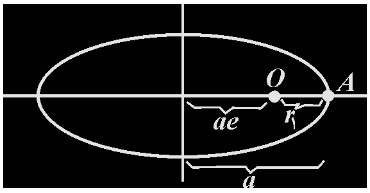
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + a^۲e^۲ \Rightarrow \begin{cases} a^۲ - b^۲ = a^۲e^۲ \Rightarrow e = \sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲} & \text{(۴-۴۳) رابطه} \\ a^۲(۱-e^۲) = b^۲ \Rightarrow b = a\sqrt{۱-e^۲} & \text{(۴-۴۴) رابطه} \end{cases}$$

مثال ۱۵- طبق قانون اول کپلر می‌دانیم که مدار سیارات به دور خورشید یک بیضی است که خورشید در یکی از کانون‌های آن قرار دارد. کم‌ترین فاصله‌ی عطارد از خورشید $۰/۳۱\ AU$ و بیش‌ترین فاصله‌ی آن $۰/۴۷\ AU$ است[1]. نیم‌محور (a) و خروج از مرکز مدار آن (e) را به‌دست آورید.

حل. در شکل زیر نقطه‌ی A و B به‌ترتیب حضیض (کم‌ترین فاصله) و اوج (بیش‌ترین فاصله) است.

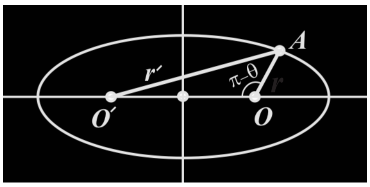


$$r_۱ = ۰/۳۱\,AU$$
$$r_۲ = ۰/۴۷\,AU$$
$$r_۱ + r_۲ = ۲a \Rightarrow a = \frac{۰/۳۱AU + ۰/۴۷\,AU}{۲} = ۰/۳۹\,AU$$



$$r_۱ = a - ae = a(۱-e) \Rightarrow ۰/۳۱\,AU = ۰/۳۹\,AU\,(۱-e)$$
$$۱-e = ۰/۸ \Rightarrow e = ۰/۲$$

یکی از کانون‌های بیضی را در مرکز دستگاه مختصات قرار می‌دهیم و می‌خواهیم در دستگاه قطبی تخت معادله‌ی بیضی را به دست آوریم.



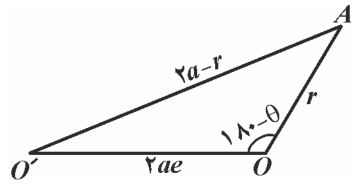
شکل ۲۹-۴

۱- یک واحد نجومی ($۱\ AU$) برابرست با $۱/۵\times۱۰^{۱۱}m$ که معادل نیم‌محور مدار زمین به دور خورشید است.

نقطه‌ی A یک نقطه‌ی بر روی بیضی و نقاط O و O' کانون‌های بیضی هستند.

$$OA = r$$
$$O'A = r' = ۲a - r$$
$$OO' = ۲ae$$

رابطه‌ی کسینوس را برای مثلث زیر می‌نویسیم.



شکل ۳۰-۴

$$(۲a - r)^۲ = (۲ae)^۲ + r^۲ - ۲.(۲ae).r\cos(۱۸۰ - \theta)$$
$$\Rightarrow ۴a^۲ - ۴ar + r^۲ = ۴a^۲e^۲ + r^۲ + ۴aer\cos\theta$$
$$\Rightarrow a - r = ae^۲ + er\cos\theta$$
$$\Rightarrow a(۱ - e^۲) = r(۱ + e\cos\theta) \Rightarrow \boxed{r = \frac{a(۱ - e^۲)}{۱ + e\cos\theta}}$$ رابطه (۴۵-۴)

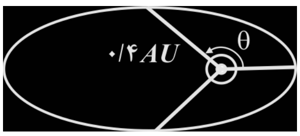
مثال ۱۶- در مثال قبل (۱۵) خروج از مرکز و نیم‌محور بزرگ عطارد را محاسبه کردیم. وقتی عطارد در فاصله‌ی $۰/۴\ AU$ از خورشید قرار می‌گیرد، شعاع مداری آن چه زاویه‌ای با حضیض آن می‌سازد؟

با توجه به این‌که مدار سیاره‌ی عطارد بیضی است، می‌دانیم که رابطه‌ی شعاع مداری (r) و زاویه‌ی بین شعاع مداری و حضیض (θ) به‌صورت زیر است:

$$r = \frac{a(۱ - e^۲)}{۱ + e\cos\theta}$$

$$\Rightarrow ۰/۴AU = \frac{۰/۳۹AU\,(۱ - (۰/۲)^۲)}{۱ + (۰/۲)\cos\theta} \Rightarrow \theta \simeq ۱۰۹^\circ$$

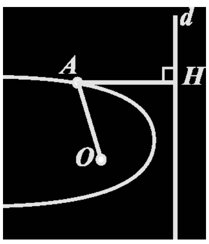
البته مشخص است که وقتی θ، -۱۰۹° باشد هم این اتفاق می‌افتد.



شکل ۳۱-۴

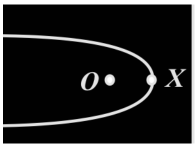
۳- سهمی

سهمی مجموعه نقاطی است که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه و یک خط برابر باشد. در شکل زیر خط d و نقطه‌ی O مشخص شده‌اند. سهمی مجموعه نقاطی است که برای هر نقطه‌ی آن مانند A، $\overline{OA}$ و $\overline{AH}$ برابر باشند.



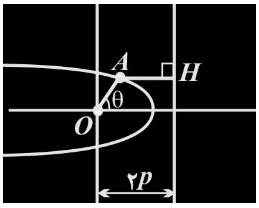
شکل ۳۲-۴

به خط d ، « خط هادی سهمی» می‌گوییم. در شکل زیر نقطه‌ی X کم‌ترین فاصله را تا کانون سهمی دارد. این فاصله را «طول سهمی» می‌گوییم و با p نمایش می‌دهیم.



شکل ۳۳-۴

طبق تعریف سهمی، فاصله‌ی نقطه‌ی X از خط هادی هم p خواهد بود. حال نقطه‌ی O را در مرکز دستگاه مختصات می‌گذاریم و معادله‌ی سهمی را در دستگاه مختصاتِ قطبی تخت به‌دست می‌آوریم.



شکل ۳۴-۴

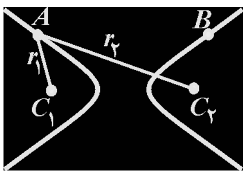
در شکل بالا نقطه‌ی A یک نقطه بر روی سهمی است. طبق تعریف می‌دانیم که $\overline{OA}=\overline{AH}=r$ از طرفی می‌دانیم که:

$$\overline{OA}\cos\theta+\overline{AH}=۲p\Rightarrow r\cos\theta+r=۲p$$

$$\Rightarrow r(۱+\cos\theta)=۲p\longrightarrow \boxed{r=\frac{۲p}{۱+\cos\theta}}$$ رابطه (۴۶-۴)

۴- هذلولی

هذلولی مجموعه نقاطی از یک صفحه است که تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه‌ی خاص(کانون‌های هذلولی) مقداری ثابت باشد. در شکل زیر نقاط $C_۱$ و $C_۲$ کانون‌های هذلولی هستند. فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه مانند A از $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب $r_۱$ و $r_۲$ است. اختلاف $r_۱$ و $r_۲$ را با $۲a$ نمایش می‌دهیم.



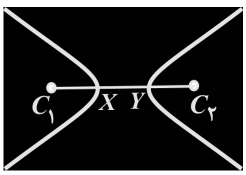
شکل ۳۵-۴

$$\left|r_۱-r_۲\right|=۲a$$

در شکل ۳۵-۴ می‌بینید که در هر هذلولی دو شاخه وجود دارد که در یکی $r_۱-r_۲=۲a$ و در دیگری $r_۲-r_۱=۲a$.

در شکل ۳۶-۴ برای نقطه‌ای مانند X، طبق تعریف هذلولی می‌دانیم:

$$\overline{XC_۲}-\overline{XC_۱}=۲a\Rightarrow\overline{XY}=۲a$$



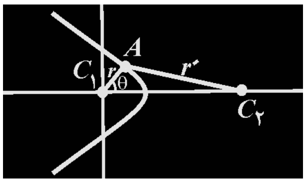
شکل ۳۶-۴

فاصله‌ی هر یک از کانون‌های هذلولی تا مرکز هذلولی را با c نمایش می‌دهیم. همانند بیضی، در این‌جا هم خروج از مرکز (e) را به شکل زیر می‌توانیم تعریف کنیم:

$$e = \frac{c}{a}$$

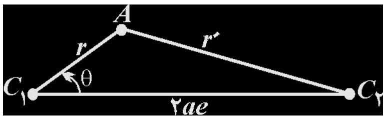
بنابراین در خصوص هذلولی می‌توانیم بگوییم فاصله‌ی C_1 و C_2 از یک‌دیگر، $2ae$ است. خروج از مرکز در بیضی عددی کوچک‌تر از یک می‌باشد، امّا در این‌جا حتماً از یک بزرگ‌تر است.

حال می‌خواهیم، معادله‌ی هذلولی را در دستگاه مختصات قطبی تخت به دست آوریم. برای این کار یکی از کانون‌های هذلولی(C_1) را در مرکز دستگاه مختصات قرار می‌دهیم. نقطه‌ی A یک نقطه‌ی دلخواه از هذلولی است که فاصله‌ی آن از C_1 و C_2 به ترتیب r و r' است.



شکل ۳۷-۴

در مثلث زیر رابطه‌ی کسینوس را می‌نویسیم:



شکل ۳۸-۴

$$r'^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2(2ae)\,r\cos\theta$$

در ضمن می‌دانیم که:

$$r' - r = 2a \Rightarrow r' = r + 2a$$

$$\Rightarrow (r+2a)^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2(2ae)\,r\cos\theta$$

$$\Rightarrow r^2 + 4ar + 4a^2 = r^2 + 4a^2e^2 - 4aer\cos\theta$$

$$\Rightarrow r + a = ae^2 - er\cos\theta \Rightarrow a(e^2-1) = r(1+e\cos\theta)$$

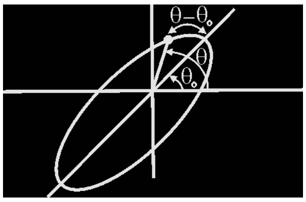
$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}} \qquad \text{رابطه (۴۷-۴)}$$

هذلولی مانند بیضی یک خم بسته نیست. وقتی $\cos\theta$ به $-\frac{1}{e}$ میل کند، r هم به بی‌نهایت میل می‌کند و پس از آن دیگر r تعریف نمی‌شود. (ما معادله‌ی یکی از شاخه‌ها را فقط در نظر گرفته‌ایم).

چون e در بیضی عددی کوچک‌تر از یک است، هیچ‌گاه $\cos\theta$ در آن به $-\frac{1}{e}$ نمی‌رسد بنابراین r در بیضی دارای کران بالا و پایین است. اما در مورد هذلولی $\cos\theta$ می‌تواند $-\frac{1}{e}$ و بزرگ‌تر از آن شود، زیرا e از یک بزرگ‌تر است.

نگاه یک‌پارچه به مقاطع مخروطی

پس از این که تک تک مقاطع مخروطی را جداگانه بررسی کردیم، حال می‌خواهیم، یک نگاه یک‌پارچه به آن‌ها داشته باشیم. برای به دست آوردن معادله‌ی مقاطع مخروطی در دستگاه قطبی تخت ما θ را از محور x می‌سنجیدیم. اگر نقطه‌ی صفر دیگری برای θ در نظر بگیریم به صورت کلی‌تر می‌توانیم به جای θ از $\theta-\theta_0$ استفاده کنیم.



شکل ۳۹-۴

حال می‌توانیم معادله‌ی کلیه مقاطع مخروطی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

رابطه (۴۸-۴)

$$\boxed{r=\frac{l_{\circ}}{1+e\cos(\theta-\theta_{\circ})}}$$

که e خروج از مرکز مقطع مخروطی و عددی نامنفی می‌باشد. $\theta_{\circ}$ زاویه‌ای است که حضیض مقطع مخروطی با محور x دارد و $l_{\circ}$ عبارت است از r در هنگامی که مقطع مخروطی به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ از حضیض خود عبور کرده است. به $l_{\circ}$، گاهی نیم وترِ قائم گفته می‌شود.

دایره	$e=0$	$l_{\circ}=R$
بیضی	$0<e<1$	$l_{\circ}=a(1-e^{2})$
سهمی	$e=1$	$l_{\circ}=2p$
هذلولی	$e>1$	$l_{\circ}=a(e^{2}-1)$

$$r=\frac{l_{\circ}}{1+e\cos(\theta-\theta_{\circ})}$$

تحلیل مسئله‌ی دو جسم

حال‌که صحبت‌های مختصری درباره مقاطع مخروطی کردیم، دوباره به جواب معادله‌ی دیفرانسیل مسئله‌ی دو جسم بازمی‌گردیم. دیدیم که وقتی جسم M را در مرکز دستگاه مختصات قرار دهیم و جسم m تحت گرانش M در حال حرکت باشد حرکت m به شکل زیر خواهد بود:

$$r=\frac{\frac{h^{2}}{GM}}{1-\frac{Ah^{2}}{GM}\cos(\theta+\theta_{\circ})}$$

که در معادله‌ی بالا h، تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم جسم و A و $\theta_{\circ}$ مقداری ثابت هستند. مقدار عددی A و $\theta_{\circ}$ به شرایط اولیه وابسته است. با توجه به این‌که $\cos(\pi+\alpha)$ برابر است با $-\cos\alpha$ می‌توانیم معادله‌ی حرکت جسم m را به صورت زیر بنویسیم:

$$r=\frac{\frac{h^{2}}{GM}}{1+\frac{Ah^{2}}{GM}\cos(\theta+\pi+\theta_{\circ})}$$

که دقیقاً معادله‌ی کلی مقاطع مخروطی است. از آن‌جا که محور سنجش θ بصورت قراردادی است. $\theta_{\circ}$ را $-\pi$ فرض می‌کنیم. تا شکل معادله به صورت زیر ساده شود.

رابطه (۴۹-۴)

$$r=\frac{\frac{h^{2}}{GM}}{1+\frac{Ah^{2}}{GM}\cos\theta}$$

این موضوع نشان می‌دهد که حرکت جسم m قطعاً یکی از مقاطع مخروطی (دایره یا بیضی یا...) خواهد بود. به طوری که $l_0 = \frac{h^2}{GM}$ و $e = \frac{Ah^2}{GM}$.

با توجه به این‌که l_0 را در حرکت‌های دایره‌ای، بیضوی، سهموی و هذلولوی می‌دانیم، متوجه می‌شویم که:

رابطه (۴-۵۰)	$h = \sqrt{GMR}$	حرکت دایره‌ای
رابطه (۴-۵۱)	$h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$	حرکت بیضوی
رابطه (۴-۵۲)	$h = \sqrt{2GMp}$	حرکت سهموی
رابطه (۴-۵۳)	$h = \sqrt{GMa(e^2-1)}$	حرکت هذلولوی

در ضمن می‌دانیم که انرژی مدار هم پایسته است. برای به دست آوردن انرژی مدارهای گرانشی، نقطه‌ی حضیض حرکت را در نظر می‌گیریم. در لحظه‌ی حضیض سرعت شعاعی $(\dot{r})$ در تمام مقاطع مخروطی صفر است.

$$r = \frac{l_0}{1+e\cos\theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{+l_0 e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r}_{(\theta=0)} = 0$$

انرژی را در لحظه‌ی حضیض می‌نویسیم:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

چون سرعت شعاعی صفر است، پس در این لحظه v تماماً به‌صورت مماسی است.

$$\Rightarrow v = \frac{h}{r}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2}$$

اگر در معادله‌ی کلی مقاطع مخروطی θ را صفر در نظر بگیریم، r به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r = \frac{l_0}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r_{(\theta=0)} = \frac{l_0}{1+e}$$

با جاگذاری r در معادله‌ی انرژی خواهیم داشت:

$$E = -\frac{GMm}{\frac{l_0}{1+e}} + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{(\frac{l_0}{1+e})^2} = -\frac{GMm}{l_0}(1+e) + \frac{1}{2}\frac{mh^2(1+e)^2}{l_0^2}$$

در ضمن می‌دانیم که $h^2 = l_0 GM$

$$\Rightarrow E = -\frac{GMm}{l_0}(1+e) + \frac{1}{2}\frac{ml_0 GM(1+e)^2}{l_0^2}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{GMm}{l_0}(1+e) + \frac{1}{2}\frac{GMm}{l_0}(1+e)^2$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{2l_0}\left[(1+e)^2 - 2(1+e)\right] = \frac{GMm}{2l_0}(1+2e+e^2-2-2e)$$

$$= \frac{GMm(e^2-1)}{2l_0}$$ رابطه (۴-۵۴)

حال با جاگذاری l_0 برای هر یک از مقاطع مخروطی انرژی را به دست می‌آوریم:

رابطه (۴-۵۵)	$\Rightarrow E = -\frac{GMm}{2R}$	$l_0 = R$	$e = 0$	دایره

رابطه (۴-۵۶)	$\Rightarrow E=-\frac{GMm}{۲a}$	$l_\circ=a(۱-e^۲)$	$\circ<e<۱$	بیضی
رابطه (۴-۵۷)	$\Rightarrow E=\circ$	$l_\circ=۲p$	$e=۱$	سهمی
رابطه (۴-۵۸)	$\Rightarrow E=+\frac{GMm}{۲a}$	$l_\circ=a(e^۲-۱)$	$e>۱$	هذلولی

نتیجه‌ای که اکنون به آن دست یافته‌ایم نقش مهمی در تحلیل مدار یک جسم در میدان گرانشی جسم دیگر دارد. پیش از این می دانستیم که انرژی (E) و بردار تکانه‌ی زاویه‌ای $(\vec{L})$، ثابت هستند. اکنون ارتباط این دو پارامتر با مشخصات مدار را هم می‌دانیم. مثلاً اگر انرژی اولیه‌ی جسم m را داشته باشیم با توجه به این‌که، منفی، مثبت یا صفر است می‌توانیم قضاوت کنیم حرکت آن چگونه خواهد بود (بیضی، سهمی و...). و مثلاً اگر دریافتیم که حرکت آن بیضوی است به سادگی می‌توانیم نیم‌محور مدار (a) را به دست آوریم.

در ضمن با داشتن $\vec{L}$ با توجه به این‌که h (تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم) برابرست با $\frac{|\vec{L}|}{m}$، می‌توانیم خروج از مرکز مدار را محاسبه کنیم. جهت بردار $\vec{L}$ هم نشان دهنده‌ی بردار عمود بر صفحه‌ی مدار است. زیرا با توجه به این‌که $\vec{L}$ حاصل‌ضرب خارجی $\vec{r}$ و $m\vec{v}$ است. پس در هر لحظه بر بردار سرعت و مکان عمود خواهد بود. پس صفحه‌ی مدار جسم، صفحه‌ی عمود بر بردار $\vec{L}$ است.

انرژی مدار	تکانه‌ی واحد جرم	معادله در دستگاه قطبی تخت	
$E=-\frac{GMm}{۲R}$	$h=\sqrt{GMR}$	$r=R$	دایره
$E=-\frac{GMm}{۲a}$	$h=\sqrt{GMa(۱-e^۲)}$	$r=\frac{a(۱-e^۲)}{۱+e\cos\theta}$	بیضی
$E=\circ$	$h=\sqrt{۲GMp}$	$r=\frac{۲p}{۱+\cos\theta}$	سهمی
$E=+\frac{GMm}{۲a}$	$h=\sqrt{GMa(e^۲-۱)}$	$r=\frac{a(e^۲-۱)}{۱+e\cos\theta}$	هذلولی

مثال ۱۷- با توجه به محاسبات مثال ۱۳، نیم‌محور مدار عطارد $۰/۳۹\ Au$ و خروج از مرکز آن ۰/۲ است. انرژی (E) و مقدار تکانه‌ی زاویه‌ای مدار عطارد را به دست آورید. (جرم خورشید و عطارد به ترتیب $۲\times۱۰^{۳۰}kg$ و $۳/۳\times۱۰^{۲۳}kg$ است.)

حل.

$$E=-\frac{GMm}{۲a}=-\frac{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۲\times۱۰^{۳۰}\times۳/۳\times۱۰^{۲۳}}{۲\times۰/۳۹\times۱/۵\times۱۰^{۱۱}}=۳/۸\times۱۰^{۳۲}J$$

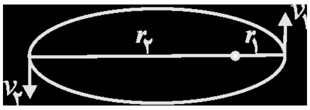
$$\left|\vec{L}\right|=mh=m\sqrt{GMa(۱-e^۲)}=۳/۳\times۱۰^{۲۳}\sqrt{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۲\times۱۰^{۳۰}\times۰/۳۹\times۱/۵\times۱۰^{۱۱}\times(۱-۰/۲^۲)}$$

$$=۹\times۱۰^{۳۸}\frac{kg\ m^۲}{s}$$

مثال ۱۸- ماهواره‌ای را به دور زمین در نظر بگیرید که در مداری بیضوی با نیم‌محور $۵\ Re$ و خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ در حال گردش است. نسبت بیش‌ترین سرعت این ماهواره به کم‌ترین سرعت آن چه قدر است؟

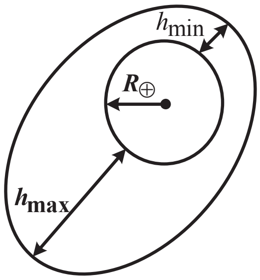
حل. انرژی جنبشی این ماهواره وقتی بیشینه است که انرژی پتانسیل آن کمینه باشد و انرژی جنبشی‌اش وقتی کمینه است که انرژی پتانسیل بیشینه باشد. بنابراین بیش‌ترین سرعت را در حضیض و کم‌ترین سرعت را در اوج دارد. از طرفی می‌دانیم که سرعت جسم در اوج و حضیض کاملاً مماسی است و هیچ مؤلفه‌ی شعاعی‌ای ندارد. $r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب فاصله‌ی ماهواره از مرکز زمین در حضیض و اوج و $v_۱$ و $v_۲$

سرعت آن در این نقاط است.



$$h = r_1 v_1 = r_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{1+e}{1-e} = 3$$

مثال ۱۹- ماهواره‌ای در صفحه‌ی استوای زمین، از غرب به شرق به دورِ زمین می‌چرخد. کم‌ترین فاصله‌ی این ماهواره از سطحِ زمین ۵۰۰ km و بیش‌ترین فاصله‌ی آن از سطحِ زمین ۲۰۰۰ km است. هنگامی که این ماهواره در حضیض قرار دارد، در سمت‌الرأسِ ناظری در طولِ جغرافیاییِ °۰ است، وقتی ارتفاعِ آن از سطحِ زمین ۱۰۰۰ km است، در سمت‌الرأسِ چه طولِ جغرافیایی قرار دارد؟ (از چرخش زمین به دور خودش صرف‌نظر کنید.)



حل. ابتدا لازم است که a و e را برای مدارِ این ماهواره محاسبه کنیم.

فاصله‌ی حضیض این ماهواره را با r_1 و فاصله‌ی اوج را با r_2 نمایش می‌دهیم.

$$r_1 = h_{min} + R_\oplus$$

$$r_2 = h_{max} + R_\oplus$$

$$R_\oplus = 6400\,km$$

$$2a = r_1 + r_2 = h_{min} + h_{max} + 2R_\oplus \Rightarrow a = 7650\,km$$

$$r_1 = a(1-e) = h_{min} + R_\oplus \Rightarrow e = 0/1$$

وقتی ارتفاع این ماهواره از سطح زمین ۱۰۰۰ km است، فاصله‌ی آن تا مرکز زمین ۷۴۰۰km می‌شود. با توجه به این‌که ماهواره به شرق می‌چرخد، طولِ جغرافیایی آن، وقتی در ارتفاع ۱۰۰۰ km قرار می‌گیرد، شرقی خواهد بود. مقدارِ طولِ جغرافیایی برابر است با زاویه‌ی بینِ حضیض و شعاعِ مداری در این حالت.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

$$r = 7400\,km \Rightarrow \theta = 76^\circ$$

$$\Rightarrow l = 76^\circ E$$

مثال ۲۰- دنباله‌داری با نیم محور $5\,AU$ و خروج از مرکز ۰/۹ در صفحه‌ی دایرةالبروج در نظر بگیرید. وقتی این دنباله‌دار در حال قطعِ مدارِ زمین است، بردار سرعت آن با مدار زمین چه زاویه‌ای می‌سازد؟ (مدار زمین را دایره‌ای در نظر بگیرید.)

حل. در واقع می‌خواهیم زاویه‌ی بین بردار سرعت دنباله‌دار و خط عمود بر شعاع مداری در این نقطه را بیابیم. با توجه به اینکه سرعت مماسی همواره عمود بر شعاع مداری است، پس ما می‌توانیم زاویه‌ی بین سرعت دنباله‌دار و سرعت مماسی را بیابیم:

$$v\cos\theta = v_t \Rightarrow \cos\theta = \frac{v_t}{v}$$

v_t به‌وسیله‌ی قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای و v به‌وسیله‌ی قانون پایستگی انرژی قابل محاسبه است.

$$r v_t = h = \sqrt{GM_\odot a(1-e^2)} \rightarrow v_t = \frac{\sqrt{GM_\odot a(1-e^2)}}{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\odot m}{r} = -\frac{GM_\odot m}{2a} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = GM_\odot\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

چون دنباله‌دار در این لحظه، در حال قطع مدار زمین است، پس r در این حالت برابر است با $1AU$.

$$\cos\theta = \frac{v_t}{v} = \frac{\sqrt{GM_{\odot}a(1-e^2)}}{r\sqrt{GM_{\odot}(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})}} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{r^2(\frac{2a-r}{ar})}} = \sqrt{\frac{a^2 r}{r^2}\frac{(1-e^2)}{(2a-r)}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}} \Rightarrow \theta = 43^\circ/4$$

مثال ۲۱- فرض کنید در یک لحظه برای زمین اتفاقی بیافتد و بدونِ این‌که مقدار سرعتش تغییری کند تنها بردارِ سرعت 45° به طرفِ خورشید منحرف شود. a و e را برای مدار جدید زمین بیابید.

حل. در چنین حالتی چون مقدار سرعت و فاصله از خورشید تغییر نکرده است، بنابراین انرژی مدار زمین تغییر نمی‌کند.

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2a}$$

بنابراین نیم محور بزرگ مدار زمین تغییری نمی‌کند و $a = 1AU$ خواهد بود. برای محاسبه‌ی خروج از مرکزِ مدارِ جدید از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$rv_t = \sqrt{GM\, a(1-e^2)}$$

می‌دانیم که $v_t = v_c \cos 45$ که v_c سرعت زمین یعنی سرعت حرکت دایره‌ای در شعاع مداری زمین است.

$$\rightarrow rv_c \cos 45 = \sqrt{GM\, a(1-e^2)}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_e}} \quad , \quad r = r_e \quad , \quad a = r_e$$

$$\Rightarrow r_e\sqrt{\frac{GM}{r_e}}\cos 45 = \sqrt{GMr_e(1-e^2)} \Rightarrow \cos^2 45 = (1-e^2) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow e^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0/7$$

اثباتِ قوانینِ کپلر

پیش از این وقتی در خصوص قوانین سه‌گانه‌ی کپلر صحبت کرده بودیم، گفتیم که این قوانین به‌وسیله‌ی قوانین نیوتن قابل اثبات هستند. اکنون می‌خواهیم به این موضوع بپردازیم و قوانین کپلر را به‌دست بیاوریم.

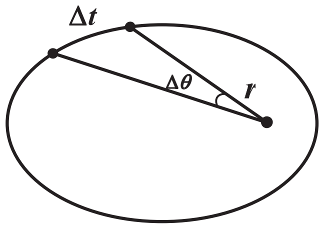
اثبات قانون اول

این قانون که در واقع بیضوی بودن مدارها را نشان می‌دهد با حل مسئله‌ی دو جسم نتیجه‌گیری می‌شود. دیدیم که با حلِ مسئله‌ی دو جسم در دستگاه مختصات قطبی تخت به چنین نتیجه‌ای رسیدیم.

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1-\frac{Ah^2}{GM}\cos(\theta+\theta_0)}$$

رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که حرکتِ متأثر از نیروی گرانش یک مقطع مخروطی خواهد بود. چون مسیر حرکتِ سیارات دارای انرژی منفی است یا به عبارت دیگر مدارهای سیارات بسته هستند، بنابراین در منظومه‌ی شمسی شاهدِ مدارهای بیضوی هستیم و خورشید در یکی از کانون‌های بیضی قرار گرفته است.

اثبات قانون دوم



شکل ۴۰-۴

در شکل ۴۰-۴ مسیر حرکت یک جسم در مداری بیضوی را مشاهده می‌کنید. وقتی این جسم در فاصله‌ی r از جسم مرکزی قرار دارد، حرکت آن پس از زمان Δt را بررسی می‌کنیم.

مشاهده می‌کنیم که جسم به اندازه‌ی $\Delta\theta$ چرخیده است. اگر زمان را بسیار کوچک درنظر بگیریم، $\Delta\theta$ نیز کوچک خواهد بود. بنابراین مساحتِ جارو شده در این حالت (ΔS) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

اگر طرفین را بر Δt تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

در حالتی که Δt به صفر میل می‌کند، عبارت بالا به گونه‌ی زیر می‌شود:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \xrightarrow{r^2 \dot{\theta} = h} \dot{S} = \frac{h}{2} = \text{ثابت}$$

رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که $\dot{S}$ (یعنی سرعت لحظه‌ای جارو شدن مساحت) مقداری ثابت است. بنابراین می‌توانیم بگوییم:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{h}{2} \Rightarrow \Delta S = \frac{h}{2} \Delta t$$ رابطه (۵۹-۴)

در رابطه‌ی بالا مساحت جارو شده (ΔS) تنها به زمان طی شده (Δt) وابسته است. بنابراین می‌توان گفت در زمان‌های برابر مساحت‌های جارو شده برابر خواهند بود.

اثبات قانون سوم

با توجه به رابطه‌ی (۵۹-۴) می‌دانیم که:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{h}{2}$$

حال می‌توانیم، Δt را یک دوره‌ی تناوب جسم در نظر بگیریم. در این صورت ΔS هم مساحت جارو شده در یک دور چرخش است که با مساحت بیضی (یعنی πab) برابر خواهد بود.

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{h}{2} \xrightarrow{h=\sqrt{GM\,a(1-e^2)}} \frac{\pi ab}{P} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{P^2} = GMa(1-e^2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۴۴-۴) می‌دانیم که $b = a\sqrt{1-e^2}$. بنابراین:

$$\frac{4\pi^2 a^2 \times a^2(1-e^2)}{P^2} = GMa(1-e^2) \to \frac{4\pi^2 a^3}{P^2} = GM$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$ رابطه (۶۰-۴)

رابطه‌ی (۶۰-۴) بسیار مفید خواهد بود. زیرا این رابطه ارتباط بین دوره‌ی تناوب مدار بیضوی و نیم محور آن را نشان می‌دهد. این رابطه در منظومه‌ی شمسی نیز صادق است و می‌توان به‌وسیله‌ی آن با داشتنِ دوره‌ی تناوب سیارات نیم‌محور آن‌ها را به‌دست آورد.

دقت کنید که $\frac{4\pi^2}{GM}$ برای یک مجموعه‌ی گرانشی مقداری ثابت است بنابراین در منظومه‌ی شمسی می‌توانیم بگوییم:

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

معمولاً برای مقایسه‌ی نیم‌محور و دوره‌ی تناوب سیارات از زمین استفاده و رابطه‌ی بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P^2{}_{(\text{بر حسب سال})} = a^3{}_{(\text{بر حسب } AU)}$$ رابطه (۶۱-۴)

مثال ۲۲- دوره‌ی تناوب دنباله‌دار مثال ۲۰ و ماهواره‌ی مثال ۱۹ را به‌دست آورید.

حل. چون دنباله‌داری که در مثال۲۰ با آن روبه‌رو بودیم، مانند زمین به دور خورشید می‌چرخد، بنابراین می‌توانیم دوره‌ی تناوب و نیم‌محور آن را با زمین مقایسه کنیم و به عبارت دیگر طبق قانون سوم کپلر موضوع را بیان کنیم.

$$P^2{}_{(\text{بر حسب سال})} = a^3{}_{(\text{بر حسب } AU)}$$

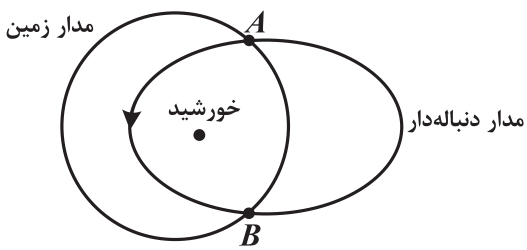
$$\Rightarrow P^2 = 5^3 \Rightarrow P = 11/2 \text{سال}$$

در مورد ماهواره‌ی مثال ۱۹ نیز می‌دانیم که نیم محور مدار آن $7650\ km$ است.

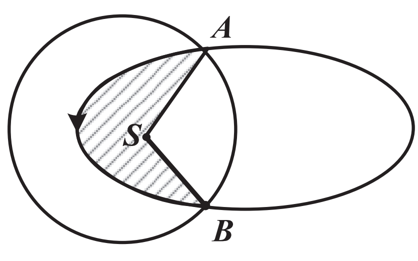
$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}a^3 \Rightarrow P = 6/65\times10^3 s = 1^h/8$$

مثال ۲۳- دنباله‌داری با نیم‌محور $1\ AU$ و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ در نظر بگیرید که در صفحه‌ی دایرةالبروج به دور خورشید می‌چرخد. این دنباله‌دار چه مدت زمانی را درون مدار زمین می‌گذراند؟

شکل زیر مسیرِ حرکت دنباله‌دار و مدار زمین را نشان می‌دهد.



در واقع ما می‌خواهیم بدانیم که چه مدتی طول می‌کشد تا این دنباله‌دار از نقطه‌ی A در جهت چرخش به نقطه‌ی B برسد. مساحتی که شعاع مداری دنباله‌دار در این مدت جارو می‌کند را با S نمایش می‌دهیم.



اگر این مدت زمان را با t نمایش دهیم، طبق رابطه‌ی (۵۹-۴) می‌دانیم که:

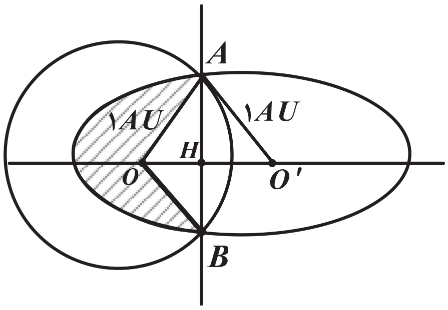
$$S = \frac{h}{2}t$$

شعاع مداری این دنباله‌دار در یک دوره‌ی تناوب مساحت بیضی(πab) را جارو می‌کند که به اندازه‌ی یک دوره‌ی تناوب (P) طول می‌کشد. بنابراین می‌دانیم که:

$$\pi ab = \frac{h}{۲}P \Rightarrow \frac{S}{\pi ab} = \frac{t}{P}$$

یعنی برای محاسبه‌ی t تنها کافی است، S را محاسبه کنیم. نسبت t به دوره‌ی تناوب این دنباله‌دار دقیقاً برابر است با نسبت S به مساحت بیضی مدار.

محاسبه‌ی S در حالت کلی کارِ ساده‌ای نیست، امّا در این مثال خاص با یک روش هندسی به سادگی می‌توان آن را محاسبه کرد. در شکل زیر به نقطه‌ی A که محل تلاقی مدار دنباله‌دار و مدار زمین است، توجه کنید. در شکل زیر O' کانون دیگر بیضی مدار می‌باشد.



$$\overline{OA} = ۱AU$$

$$\overline{OA} + \overline{O'A} = ۲a = ۲AU \Rightarrow \overline{O'A} = ۱AU$$

بنابراین نقطه‌ی A دقیقاً بر روی یکی از محورهای تقارن بیضی قرار دارد. نقطه‌ی B دقیقاً نقطه‌ی مقابل A است و $\overline{AB}$ بیضی مدار را به دو قسمت تقسیم کرده است. اکنون می‌توانیم به سادگی S را محاسبه کنیم.

$$S = \frac{\pi ab}{۲} - S_{\underset{OAB}{\Delta}}$$

$$S_{\underset{OAB}{\Delta}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OH}}{۲} = \frac{۲b \times ae}{۲} = abe$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi ab}{۲} - abe$$

حال می‌توانیم مدت زمانی که دنباله‌دار درون مدار زمین است (t) را محاسبه کنیم.

$$\frac{S}{\pi ab} = \frac{t}{P} \Rightarrow \frac{\frac{\pi ab}{۲} - abe}{\pi ab} = \frac{t}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} - \frac{e}{\pi} = \frac{t}{P} \Rightarrow t = (\frac{۱}{۲} - \frac{e}{\pi})P$$

چون نیم محور این مدار ۱ AU است، پس P یک سال است.

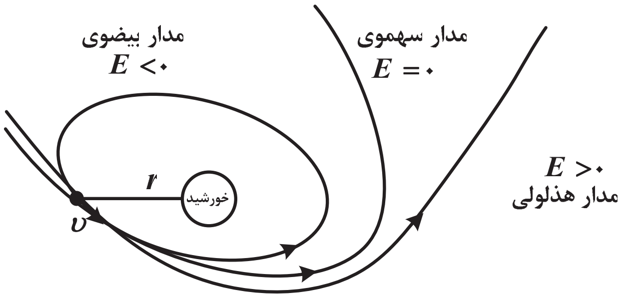
$\Rightarrow t =$ سال۰/۳۴ = روز۱۲۴

➢ معادله‌ی کپلر

بگذارید به آن‌چه در زمینه‌ی مکانیک سماوی می‌دانیم، نگاهی دوباره داشته باشیم. فرض کنید با خبر شویم که جسمی در فاصله‌ی r از خورشید دارای سرعت v است. فوراً می‌توانیم انرژی این جسم را محاسبه کنیم.

$$E = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{GM_{\odot}m}{r}$$

می‌دانیم که اگر انرژی این جسم مثبت باشد قطعاً مدار آن به دور خورشید هذلولوی خواهد بود و اگر انرژی آن صفر باشد در یک مدار سهموی قرار می‌گیرد. در ضمن می‌دانیم که اگر انرژی آن منفی باشد، مدار این جسم بیضوی است و در چنین مداری به دورِ خورشید خواهد چرخید.



شکل ۴۱-۴ – سرنوشت‌های مختلفی که با توجه به E برای جسم رقم می‌خورد.

حال فرض می‌کنیم که انرژی جسم منفی باشد. در این صورت می‌دانیم که:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\odot m}{r} = -\frac{GM_\odot m}{2a} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{را محاسبه می‌کنیم } a$$

در ضمن با توجه به نحوه‌ی جهت‌گیری v می‌توانیم v_t (یعنی سرعت مماسی) را بیابیم. در این صورت می‌توانیم بگوییم:

$$h = rv_t = \sqrt{GM_\odot a(1-e^2)} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{را محاسبه می‌کنیم } e$$

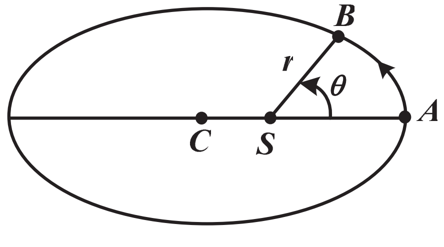
هم‌چنین می‌توانیم بفهمیم که شعاع مداری این جسم اکنون چه زاویه‌ای با جهت حضیض مدارش می‌سازد:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{را محاسبه می‌کنیم } \theta$$

مسئله‌ای که اکنون در برابر ما قرار دارد، این است که چگونه می‌توانیم مدت زمانی که از حضیض مدار جسم گذشته است را محاسبه کنیم؟

$$\vec{r}, \vec{v} \longrightarrow E, h \longrightarrow a, e \longrightarrow \theta \xrightarrow{?} t$$

شکل ۴۲-۴ را در نظر بگیرید که مداری بیضوی را نمایش می‌دهد.



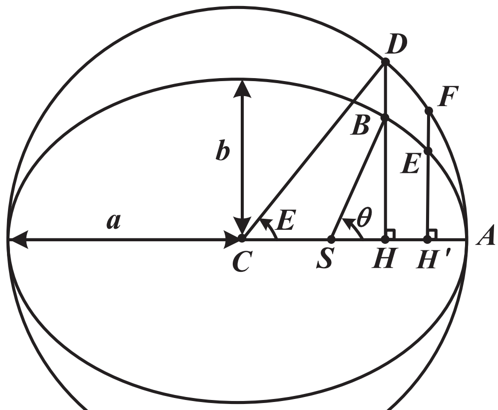
شکل ۴۲-۴

می‌خواهیم بدانیم که چقدر طول می‌کشد جسم از A به B برود. مساحت ABS که بخشی از یک بیضی است را با S نمایش می‌دهیم.

$$\frac{S}{\pi ab} = \frac{t}{P} \Rightarrow t = \frac{P}{\pi ab}S$$

در مثال ۲۳ هم با چنین مسئله‌ای روبه‌رو بودیم امّا چون آن مثال یک حالت خاص بود، به سادگی توانستیم، S را محاسبه کنیم، امّا اکنون می‌خواهیم یک رابطه‌ی کلی برای به‌دست آوردن S بیابیم.

دایره‌ای را بر بیضی مدار محیط می‌کنیم.



شکل ۴۳-۴

E را به عنوان یک نقطه‌ی دلخواه بر روی بیضی در نظر بگیرید. با توجه به این‌که، دایره‌ای که رسم کرده‌ایم بر بیضی محیط است و شعاع آن با a برابر است، در می‌یابیم که:

$$\frac{EH'}{FH'}=\frac{b}{a}$$ رابطه (۶۲-۴)

برای اثبات رابطه‌ی بالا، می‌توانید از معادله‌ی دایره و بیضی در دستگاه مختصات دکارتی استفاده کنید.

به زاویه‌ی θ « بی‌هنجاری واقعی[1] » می‌گوییم. اکنون زاویه‌ی $D\widehat{C}H$ را « بی‌هنجاری خروج از مرکزی»[2] می‌نامیم و با E نمایش می‌دهیم.

با توجه به رابطه‌ی (۶۲-۴) می‌دانیم که:

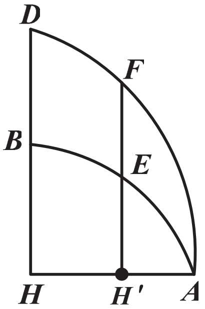
$$\frac{BH}{DH}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{r\sin\theta}{a\sin E}=\frac{b}{a}\Rightarrow r\sin\theta=b\sin E$$ رابطه (۶۳-۴)

در ضمن مشخص است که:

$$r\cos\theta=a\cos E-ae$$ رابطه (۶۴-۴)

اکنون می‌خواهیم مساحت ABS را محاسبه کنیم. مساحت این شکل برابر است با مجموع مساحت $\overset{\Delta}{BHS}$ و مساحت ABH.

برای محاسبه‌ی مساحت ABH می‌توانیم از مساحت ADH که بخشی از دایره است استفاده کنیم.



شکل ۴۴-۴

در شکل ۴۴-۴ مشخص است که با رسم پاره‌خط‌هایی عمود بر AH می‌توانیم ABH را به تعداد بسیار زیادی مستطیل کوچک تقسیم کنیم.

در ضمن می‌دانیم که:

$$\frac{EH'}{FH'}=\frac{b}{a}$$

---

۱ - true anomaly
۲ - eccentric anomaly

بنابراین نسبت مساحت هر مستطیل کوچکی از ABH به مساحت مستطیل کوچک متناظر با آن در ADH، $\frac{b}{a}$ است. به این‌ترتیب مشخص می‌شود که:

$$\text{مساحت } ABH = \frac{b}{a} \times \text{مساحت } ADH$$

در ضمن می‌دانیم که مساحت ADH، تفاضل مساحت قطاع ADC و مساحت مثلث $\overset{\Delta}{HDC}$ است.

$$\text{مساحت } ADH = \frac{1}{2}a^2E - \frac{a\sin E \times a\cos E}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت } ABH = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2E}{2} - \frac{a^2\sin E\cos E}{2}\right) = \frac{abE}{2} - \frac{ab\sin E\cos E}{2}$$

از ابتدا می‌دانستیم که:

$$\text{مساحت } ABS = \text{مساحت } \overset{\Delta}{BHS} + \text{مساحت } ABH$$

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{BHS} = \frac{\overline{BH} \times \overline{SH}}{2}$$

طبق رابطه‌ی (۶۳- ۴) و (۶۴- ۴) می‌دانیم که:

$$\overline{BH} = b\sin E \quad , \quad \overline{SH} = a\cos E - ae$$

$$\Rightarrow \text{مساحت } \overset{\Delta}{BHS} = \frac{b\sin E\,(a\cos E - ae)}{2}$$

$$S = \text{مساحت } ABS = \text{مساحت } \overset{\Delta}{BHS} + \text{مساحت } ABH$$

$$\Rightarrow S = \frac{b\sin E\,(a\cos E - ae)}{2} + \frac{ab\,E}{2} - \frac{ab\sin E\cos E}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{ab\sin E\cos E}{2} - \frac{abe\sin E}{2} + \frac{ab\,E}{2} - \frac{ab\sin E\cos E}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{ab}{2}(E - e\sin E)$$

حال به سادگی می‌توانیم t را محاسبه کنیم:

$$t = \frac{P}{\pi ab}S \Rightarrow t = \frac{P}{2\pi}(E - e\sin E)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{P}t = E - e\sin E \qquad \text{رابطه (۶۵-۴)}$$

$\frac{2\pi}{P}$ در رابطه‌ی بالا سرعت زاویه‌ای میانگین در یک دوره‌ی تناوب است. به این دلیل $\frac{2\pi}{P}t$ را « بی‌هنجاری میانگین»[1] می‌نامیم و با M نمایش می‌دهیم. به رابطه‌ی (۶۵-۴) « معادله‌ی کپلر» گفته می‌شود.

۱ - mean anomaly

اکنون بهتر است روابطی بیابیم که با داشتن r یا θ بتوانیم E را محاسبه کنیم. رابطه‌ی (۶۳-۴) و (۶۴-۴) به‌صورت زیر بودند:

$$r\sin\theta = b\sin E$$
$$r\cos\theta = a\cos E - ae$$

اگر این دو رابطه را به توان دو برسانیم و با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$r^2 = b^2\sin^2 E + a^2\cos^2 E + a^2e^2 - 2a^2e\cos E$$
$$r^2 = a^2(1-e^2)\sin^2 E + a^2\cos^2 E + a^2e^2 - 2a^2e\cos E$$
$$\Rightarrow r^2 = a^2 + a^2e^2(1-\sin^2 E) - 2a^2e\cos E = a^2(1+e^2\cos^2 E - 2e\cos E)$$
$$\Rightarrow r^2 = a^2(1-e\cos E)^2 \Rightarrow r = a(1-e\cos E)$$ رابطه (۶۶-۴)

رابطه بالا، رابطه‌ی بین r و E است. به‌همین شکل می‌خواهیم رابطه‌ای بین θ و E بیابیم ابتدا از رابطه‌ی (۶۴-۴) استفاده می‌کنیم:

$$\cos\theta = \frac{a\cos E - ae}{r}$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \quad , \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{r - a\cos E + ae}{r + a\cos E - ae}$$

مقدار r را از رابطه‌ی (۶۶-۴) جاگذاری می‌کنیم.

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{a(1-e\cos E) - a\cos E + ae}{a(1-e\cos E) + a\cos E - ae} = \frac{a(1+e) - a\cos E\ (1+e)}{a(1-e) + a\cos E\ (1-e)}$$
$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{(1+e)}{(1-e)} \times \frac{1-\cos E}{1+\cos E} = \frac{1+e}{1-e} \times \frac{\frac{1-\cos E}{2}}{\frac{1+\cos E}{2}}$$
$$= \frac{1+e}{1-e} \times \frac{\sin^2\frac{E}{2}}{\cos^2\frac{E}{2}} = \frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{E}{2}$$
$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tan\frac{E}{2}$$ رابطه (۶۷-۴)

با استفاده از رابطه‌ی (۶۶-۴) و (۶۷-۴) با داشتن r یا θ می‌توانیم در هر لحظه E را محاسبه کنیم آنگاه با معادله‌ی کپلر یعنی رابطه‌ی (۶۵-۴)، زمانی که از حضیض مدار سپری شده است، قابل محاسبه است.

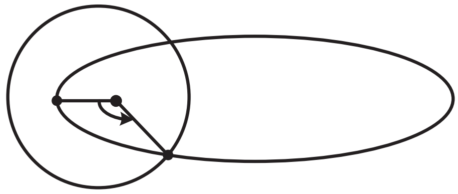
مثال ۲۴- دنباله‌داری با نیم‌محور ۵ AU و خروج از مرکز ۰/۹ (مثال ۲۰) چه مدت زمانی را درون مدار زمین می‌گذراند.

چون نیم‌محورِ این دنباله‌دار ۵ AU نجومی است، دیگر نمی‌توانیم مانندِ مثال ۲۳ مدت زمان را بیابیم. اکنون ناگزیریم که از معادله‌ی کپلر استفاده کنیم.

حل. ابتدا E را در زمانی که فاصله‌ی دنباله‌دار از خورشید ۱ AU است. محاسبه می‌کنیم. باتوجه به رابطه‌ی (۶۶-۴):

$$r = a(1-e\cos E) \Rightarrow 1AU = 5AU\,(1-0/9\times\cos E) \Rightarrow E = 27^\circ/3$$

حال می‌توانیم با معادله‌ی کپلر مدت زمانی که این دنباله‌دار از حضیض مدار تا فاصله‌ی ۱ AU می‌رسد را حساب کنیم. توجه کنید که زمانی که این دنباله‌دار درون مدار زمین است، دو برابر مدت زمان بین حضیض تا قطع کردن مدار زمین می‌باشد.



$$\frac{۲\pi}{P}\times\left(\frac{t}{۲}\right)=E-e\sin E$$

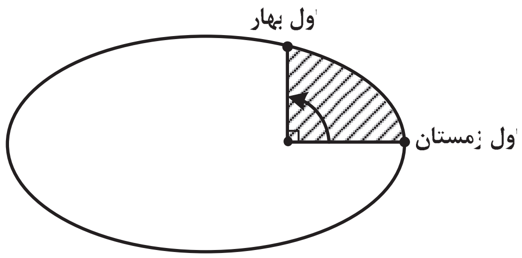
در مثال ۲۲، دوره‌ی تناوب این دنباله‌دار (P) را ۱۱/۲ سال محاسبه کرده بودیم.

$$t=\frac{P}{\pi}(E-e\sin E)=\frac{۱۱/۲}{\pi}\times\left(\frac{۲۷/۳}{۱۸۰}\times\pi-۰/۹\sin ۲۷/۳\right)$$

(توجه داشته باشید که در معادله‌ی کپلر E باید بر حسب رادیان وارد شود.)

$\Rightarrow t=$ سال ۰/۲۳ = ۸۳ روز

مثال ۲۵- زمانی که زمین از حضیض مدارش عبور می‌کند تقریباً اول زمستان است. با توجه به این‌که خروج از مرکز مدار زمین ۰/۰۱۶۷۲ است، مدت زمان فصل زمستان را به‌دست آورید.



حل. در واقع باید به‌دست بیاوریم در اول بهار که بی‌هنجاری واقعی ۹۰° است چه مدتی از حضیض گذشته است. از رابطه‌ی (۶۷-۴) استفاده می‌کنیم:

$$\tan\frac{\theta}{۲}=\sqrt{\frac{۱+e}{۱-e}}\tan\frac{E}{۲}$$

$$\theta=۹۰^\circ\Rightarrow E\simeq ۸۹^\circ$$

$$\frac{۲\pi}{P}\times t=E-e\sin E\Rightarrow t=\text{۸۹/۴ روز}$$

حلِ معادله‌ی کپلر

در مثال‌های ۲۴ و ۲۵ با دانستن موقعیت جسم، زمان را محاسبه می‌کردیم. اکنون تصور کنید که ما با داشتن زمان بخواهیم مکان جسم را بیابیم. در این صورت باید به‌وسیله‌ی معادله‌ی کپلر ابتدا E را محاسبه کنیم.

$$\frac{۲\pi}{P}t=E-e\sin E$$

در چنین وضعیتی محاسبه‌ی E به سادگی میسر نمی‌باشد. مثلاً فرض کنید با معادله‌ی زیر روبه‌رو باشیم:

$$۰/۴۷=E-۰/۴\sin E$$

گاهی اوقات با چندین بار آزمون و خطا می‌توان مقدار تقریبی E را یافت برای چنین مثالی یک مقدار اولیه‌ی پیشنهادی، همان ۰/۴۷ است.

$$E_\circ=۰/۴۷\Rightarrow ۰/۴۷-۰/۴\sin ۰/۴۷^{rad}=۰/۲۸۹$$

بنابراین باید $E_۱$ را بزرگ‌تر از $E_۰$ انتخاب کنیم.

$$E_۱ = ۰/۶ \Rightarrow ۰/۶ - ۰/۴\sin ۰/۶^{rad} = ۰/۳۷۴$$

$$E_۲ = ۰/۷ \Rightarrow ۰/۷ - ۰/۴\sin ۰/۷^{rad} = ۰/۴۴۲$$

$$E_۳ = ۰/۷۵ \Rightarrow ۰/۷۵ - ۰/۴\sin ۰/۷۵^{rad} = ۰/۴۷۷$$

$$E_۴ = ۰/۷۴ \Rightarrow ۰/۷۴ - ۰/۴\sin ۰/۷۴^{rad} = ۰/۴۷۰$$

بنابراین ۰/۷۴ مقدار قابل قبولی برای E می‌باشد.

روش مناسب دیگری که در عمل بسیار مفید است. استفاده از ماشین حساب‌های مهندسی[1] است.

برای حل معادله‌ی ($۰/۴۷ = E - ۰/۴\sin E$) می‌توانیم پس از دادن یک مقدار اولیه به ماشین حساب، عبارت زیر را تایپ کنیم:

$$۰/۴۷ + ۰/۴\sin(Ans)$$

آن‌گاه با زدن دکمه‌ی $\boxed{=}$ کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که عددی که ماشین حساب نمایش می‌دهد تغییر نکند. در این حالت:

$$Ans = ۰/۴۷ + ۰/۴\sin(Ans) \Rightarrow ۰/۴۷ = Ans - ۰/۴\sin(Ans) \Rightarrow Ans = E$$

برای مثال اگر بخواهیم معادله‌ی ($۰/۴۷ = E - ۰/۴\sin E$) را حل کنیم. با قرار دادن مقدار اولیه‌ی ۰ پس از فشار دادن پیاپی دکمه‌ی $\boxed{=}$ به ترتیب مقادیر زیر را در صفحه‌ی نمایشگر ماشین حساب مشاهده می‌کنیم:

۰/۴۷ و ۰/۶۵۱۱۵و ۰/۷۱۲۴۴ و۰/۷۳۱۴۷ و۰/۷۳۷۱۸ و ۰/۷۳۸۸۸ و ۰/۷۳۹۳۸ و۰/۷۳۹۵۳ و۰/۷۳۹۵۷و۰/۷۳۹۵۹و۰/۷۳۹۵۹و۰/۷۳۹۵۹ و ۰/۷۳۹۵۹و ...

ملاحظه می‌کنید که پس از مدتی عددی که در نمایشگر ماشین حساب مشاهده می‌کنیم تغییری نمی‌کند.

به پرسش‌های زیر فکر کنید

۱ ـ سعی کنید با همان نگاه ابن‌سینا بعضی از پدیده‌های فیزیکی را توجیه کنید. مثلاً جوشیدن چشمه‌های آب از سطح زمین یا ماندن یخ بر روی آب.

۲- جوابی که ما برای معادله‌ی دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده در نظر گرفتیم $x = A\cos(\omega t + \theta_۰)$ بود. چرا این جواب با $x = A\sin(\omega t + \theta')$ تفاوتی ندارد؟

۳- سعی کنید اطلاعاتی در مورد قانون گاؤس در الکترومغناطیس به‌دست آورید و به‌وسیله‌ی آن قانونِ گرانش را به شکل دیگری فرمول‌بندی کنید.

۴- اگر به پرسش ۳ پاسخ داده‌اید، آیا می‌توانید از طریق فرمول‌بندی جدیدتان، قضیه‌ی پوسته‌های گرانشی را اثبات کنید؟

۵- دانش‌آموزی جسمی را به طناب متصل کرده است و به دور سرش می‌چرخاند. با توجه به این‌که شاهدِ یک حرکت دایره‌ای هستیم، توضیح دهید که چه نیرویی تأمین‌کننده‌ی نیروی مرکزگرا است.

۶- می‌دانیم که زمین در یک حرکت بیضوی به دور خورشید می‌چرخد. باتوجه به طول فصل‌های مختلف سال، زمان تقریبی عبور از حضیض را حدس بزنید.

[1]- Scientific calculator

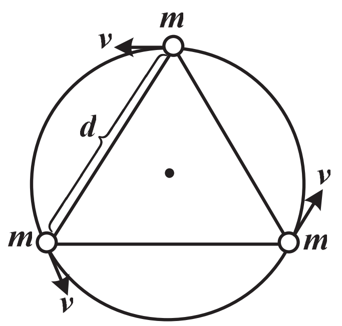
مسائل

۱- نیرویی به جسمی با جرم m وارد می‌شود و سرعت این جسم در هر لحظه از رابطه‌ی $v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}$ به‌دست می‌آید. $v_\circ$ و τ در این رابطه مقادیر ثابتی می‌باشند. شکل نیروی وارد بر جسم را پیدا کنید.

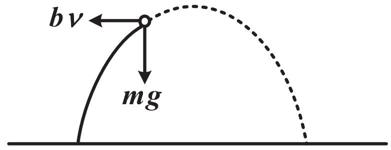
۲- بُرد یک پرتابه (R) را بر حسب سرعت اولیه ($v_\circ$) و زاویه‌ی پرتاب با افق (θ) بیابید. در چه θ ای R بیشینه خواهد بود؟

۳- مثال (۷) را با فرض این‌که تونل از مرکز زمین عبور نکند، حل کنید.

۴- سه جسم با جرم‌های برابر (m) در نظر بگیرید که در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع d قرار گرفته‌اند. این اجسام با چه سرعت اولیه‌ای می‌توانند در مداری دایره‌ای به دور مرکز جرم بچرخند؟



۵- جسمی به جرم m را با زاویه‌ی θ نسبت به افق و سرعت v پرتاب می‌کنیم . بادِ ملایمی در حال وزیدن است و به جسم نیرویی به صورت $-bv$ در راستای افقی وارد می‌کند (v سرعتِ افقیِ جسم است.) بُرد (R) را محاسبه کنید.



نیروی وارد بر این جسم

۶- یک الکترون و پروتون در فاصله‌ی r از هم قرار دارند. نسبت نیروی الکترومغناطیسی به گرانشی را برای این دو ذرّه به‌دست آورید.

اگر الکترون بخواهد به دور پروتون حرکت دایره‌ای داشته باشد، سرعت آن را بر حسب ثوابت به‌دست آورید.

۷- نیروی گرانش را به‌صورت $F = -kr^{\alpha}$ در نظر بگیرید.

α چقدر باشد تا دوره تناوب حرکت دایره‌ای در فاصله‌ی r متناسب با r^{2} باشد؟

۸- جسمی را با سرعت فرار به صورت کاملاً عمودی از سطح زمین پرتاب می‌کنیم. رابطه‌ای بین فاصله‌ی این جسم تا مرکز زمین (r) و زمان (t) بیابید.

۹- نیروی گرانشی را به‌صورت $F = -Gm_۱m_۲r$ درنظر بگیرید. (مانند مثال ۶) دقت کنید که G در این رابطه همان Gای که قبلاً می‌شناخته‌ایم نیست. اکنون تکانه‌ی زاویه‌ای جسمی که در فاصله‌ی r حرکتِ دایره‌ای می‌کند را برحسب r به‌دست آورید.

۱۰- با توجه به تعریف مقاطع مخروطی، معادله‌ی دایره، بیضی، سهمی و هذلولی را در دستگاه مختصات دکارتی را بیابید.

۱۱- معادله‌ی یک بیضی که مرکز آن در مرکز دستگاه مختصات است را در دستگاه مختصات قطبی تخت بیابید.

۱۲- معادله‌ی سهمی در دستگاه مختصات دکارتی به‌صورت $y = \alpha x^۲$ است. α چه ارتباطی با طول حضیض سهمی (p) دارد؟

۱۳- با توجه به این‌که آونگ در نوسان‌های کوچک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، باید انرژی پتانسیل آن هم به‌صورت $\frac{۱}{۲}k\theta^۲$ باشد. k را بیابید.

۱۴- نقطه‌ای را در میان زمین و ماه بیابید که در آن نیروی گرانشِ زمین و ماه یکدیگر را خنثی کنند.آیا این نقطه همان مرکزِ جرمِ زمین و ماه است؟

۱۵- کم‌ترین تناوبی که یک ماهواره می‌تواند به دورِ زمین داشته باشد، چقدر است؟ این دوره‌ی تناوب را با دوره‌ی تناوب مثال ۷ (تونل درون زمین) مقایسه کنید.

۱۶- جسمی در فاصله‌ی r از یک جرم مرکزی در حال حرکت دایره‌ای است. در یک لحظه به صورت ناگهانی بردار سرعت این جسم در صفحه‌ی مدارش به اندازه‌ی θ می‌چرخد، به‌طوری که اندازه‌ی سرعت تغییر نمی‌کند. ثابت کنید که خروج از مرکز مدار جدید (e) با $\sin\theta$ برابر خواهد بود.

۱۷- زمانی که زمین از حضیض مدارش عبور می‌کند تقریباً اوایل زمستان است. مدت زمانِ فصل‌های مختلف را به‌دست آورید.

۱۸- در مثال ۱۹ برای این‌که بتوانیم سؤال را به سادگی پاسخ دهیم، فرض کرده بودیم که زمین نمی‌چرخد. اکنون با در نظر گرفتن چرخش زمین، طول جغرافیایی را بیابید.

۱۹- ثابت کنید که بین مدارهای هم انرژی، بیشترین تکانه‌ی زاویه‌ای را مدار دایره‌ای دارد.

۲۰- فرض کنید که اداره‌ی پست بخواهد به‌وسیله‌ی مدارهای دایره‌ای بر روی سطح زمین، محموله‌های پستی را منتقل کند. مدت زمان رسیدن یک محموله‌ی پستی از زابل به خلخال چه‌قدر است؟ (از چرخش زمین صرف‌نظر کنید)

خلخال $\left| \begin{array}{l} \phi_{kh} = ۳۸^\circ ۳۲' N \\ l_{kh} = ۴۸^\circ ۳۷' E \end{array} \right.$

زابل $\left| \begin{array}{l} \phi_{z} = ۳۱^\circ ۰۲' N \\ l_{z} = ۶۱^\circ ۳۰' E \end{array} \right.$

۲۱- می‌خواهیم سفینه‌ای را از مدار زمین به مدار مشتری منتقل کنیم. برای این‌کار از انتقال مدار هوهمان[۱] استفاده می‌کنیم در این روش انتقال، سفینه را در یک مدار بیضوی به دور خورشید قرار می‌دهیم به گونه‌ای که حضیض مدار، شعاع مداری زمین و اوج آن، شعاع مداری مشتری است. (این روش به صرفه‌ترین روش برای انتقال‌های مداری است.) چقدر طول می‌کشد تا سفینه به مشتری برسد؟

۱ -Hohmann Transfer